

Ua 8-11790

EIN BEITRAG ZUR BEKÄMPFUNG VON
GLOCKENTURMSCHWINGUNGEN

MUSTAFA SAVCI

Universitätsbibliothek
der
Technischen Universität
Braunschweig

Ua 8-11790

EIN BEITRAG ZUR BEKÄMPFUNG VON GLOCKENTURMSCHWINGUNGEN

Von der
Fakultät für Maschinenwesen
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
genehmigte Dissertation

69.2415

vorgelegt von
Y. Mühendis (Istanbul Teknik Universitesi)
MUSTAFA SAVCI
aus Izmir (Türkei)

Referent: Professor Dr.-Ing. K. Lürenbaum

Korreferent: Professor Dr.-Ing. W. Meyer zur Capellen

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Februar 1969

Universitätsbibliothek
der
Technischen Universität
Braunschweig

U 8-11740

EIN BEITRAG ZUR BEKÄMPFUNG VON GLOCKENTURMSCHWINGUNGEN

Von der

Fakultät für Maschinenwesen

der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieur

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Y. MURAKAMI (Geburtsort: Tokio, Japan)

MUSTAFA SAVALI

aus Izmir (Turkei)

Erstreferent: Herr Professor Dr.-Ing. H. Peeken

Zweitreferent: Herr Professor Dr.-Ing. W. Meyer

Tag der mündlichen Prüfung: 17. April 1960

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Fakultät für Maschinenwesen
Institut für Maschinengestaltung und Maschinendynamik

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Maschinengestaltung und Maschinendynamik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen.

Dem Leiter des Instituts, meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr.-Ing. K. Lürenbaum, bin ich für seine großzügige Unterstützung bei der Durchführung der Arbeit zu außerordentlichem Dank verpflichtet.

Mein Dank gilt ebenfalls Herrn Professor Dr.-Ing. W. Meyer zur Capellen für die Durchsicht der Arbeit und die sich daraus ergebenden Hinweise.

Herrn Professor Dr.-Ing. H. Peeken, dem jetzigen Leiter des Instituts, möchte ich für seine Unterstützung während der Anfertigung der Arbeit meinen Dank aussprechen, ebenso meinen Kollegen Dr.-Ing. O. Kirch und Dipl.-Ing. M. Faber für Ihre wertvolle Hilfe.

Mein Dank gilt ferner allen Mitarbeitern des Instituts, die mir bei der Ausführung der Arbeit behilflich waren.

I N H A L T

0.	Einleitung	7
1.	Die Glocke als Schwingungserreger	9
1.1.	Beim Läuten der Glocke auftretende Kräfte	9
1.2.	Zeitlicher Verlauf der dimensionslosen Horizontalkraft H^*	11
1.3.	Schwingungsmessungen an einem Glockenturm	16
1.4.	Abhilfemaßnahmen zur Beseitigung gefährlicher Glockenturmschwingungen	20
2.	Flüssigkeitsschwingungen in Behältern	22
2.1.	Allgemeines	22
2.2.	Erzwungene Schwingungen einer reibungslosen Flüs- sigkeit in einem translatorisch bewegten, recht- eckigen Behälter	22
2.2.1	Die Berechnung der Potentialfunktion $\phi(x, z, t)$.	25
2.3.	Die durch die Flüssigkeitsbewegung erzeugte Kraft .	28
2.4.	Das durch die Flüssigkeitsbewegung um die y-Achse des Behälters erzeugte Moment	30
2.5.	Das Ersatzsystem (mechanisches Modell) für die beschriebene Flüssigkeitsschwingung	31
2.5.1	Die horizontale Kraft (F_H^*) durch das Ersatz- system	32
2.5.2	Das Moment (M_y^*) um den Punkt 0 durch das Ersatz- system	33
2.5.3	Ermittlung der mechanischen Größen	34
2.6.	Die gedämpften Schwingungen	37
2.7.	Experimentelle Ermittlung der Flüssigkeits- dämpfung	41
3.	Biegeschwingungen des Balkens	48
3.1.	Biegeschwingungen des ungedämpften Balkens	48
3.2.	Werkstoffdämpfung	56

4.	Theorie des dynamischen Schwingungsdämpfers für Biegeschwingungen	60
4.1.	Aufgabenstellung	60
4.2.	Die freien Schwingungen	62
4.3.	Die erzwungenen Schwingungen	67
4.4.	Die Abstimmung für den dynamischen Schwingungsdämpfer	74
5.	Experimentelle Untersuchungen	80
5.1.	Allgemeines	80
5.2.	Versuchsaufbau	82
5.3.	Versuchsdurchführung	84
5.4.	Versuchsergebnisse	87
6.	Diskussion der Anwendungsmöglichkeiten eines Flüssigkeitsbehälters als Schwingungstilger für einen Glockenturm	92
7.	Zusammenfassung	99
8.	Literaturverzeichnis	101
	Anhang	104

Formelzeichen

a	Länge des Behälters
b	Breite des Behälters
\vec{b}	Beschleunigungsvektor eines Flüssigkeitsteilchens
c_n	Federsteifigkeit der n-ten Feder im Ersatzsystem
d	Querfedersteifigkeit der Einspannung
\vec{e}	Einheitsvektor
f	Frequenz
g	Beschleunigung des freien Falles
h	Höhe der Flüssigkeit im Behälter
k	Dämpfungskonstante der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung
l, l_i, l_0	Länge
l_r	Reduzierte Pendellänge der Glocke
m	Masse
m_n	n-te Masse im Ersatzsystem
p	Druck der Flüssigkeit
q	Auslenkung
r_i	Trägheitsradius der Glocke
r_s	Abstand des Glockenschwerpunktes von der Drehachse
t	Zeit
u	Geschwindigkeitskomponente eines Flüssigkeitsteilchens
v_o	Verhältniszahl für die schwingende Masse in Flüssigkeit
v_m	Verhältniszahl für die nicht schwingende Masse in Flüssigkeit
\mathcal{V}	Vergrößerungsfunktion
x	Auslenkung
y	Durchbiegung
\bar{y}	normierte Durchbiegung
z_n	Vertikale Lage der n-ten Masse des Ersatzsystems
A	Amplitude
C_B	Bettungsziffer des Bodens
D	Dimensionslose Dämpfungszahl
E	1) E-Modul, 2) Wellenenergie
F	1) Flüssigkeitskraft, 2) Fläche, Querschnitt
G	Gewicht
H	Horizontalkraft der Glocke
I, I_a, I_o	Flächenträgheitsmoment

M	1) Masse, nicht schwingende Masse der Flüssigkeit 2) Moment des Balkens
P, P ₀	Kraft
Q	Querkraft
R	dimensionslose Federsteifigkeit
S _B	Schubziffer des Bodens
T	Periode
\vec{V}	Geschwindigkeitsvektor eines Flüssigkeitsteilchens
V	Vertikalkraftkomponente der Glocke
W	Energie
Z	Vertikale Lage der n-ten Masse des Ersatzsystems
α	Verhältniszahl für die Biegesteifigkeit eines Balkenabschnittes
β	Verhältniszahl für die Länge eines Balkenabschnittes
δ	Logarithmisches Dekrement
ϵ	1) Dehnung, 2) Phasenwinkel
γ	Frequenzverhältnis
Θ_y	Massenträgheitsmoment der Glocke bezogen auf die Drehachse
χ	Drehfedersteifigkeit der Einspannung
λ	Frequenzkennwert
μ, μ_0	Massenbelegung des Balkens
ν	Kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit
ρ	Dichte
σ	1) Eigenfrequenz der Flüssigkeit, 2) Normalspannung
τ	Schubspannung
φ	1) Glockenwinkel, 2) Neigung des Balkens
Φ	Potentialfunktion
ψ	verhältnismäßige Elementdämpfung
ω, Ω	Kreisfrequenz

Indizes

d	Querfeder
e	eigen
k	komplex
B	Boden
D	Dämpfer
F	Flüssigkeit, Feder
G1	Glocke
T	Turm
χ	Drehfeder

0. EINLEITUNG

Über die Beanspruchungen von Glockentürmen gibt es eine umfassende Literatur [1] bis [5].

Die Glockentürme werden durch statische und dynamische Lasten beansprucht. Das in vertikaler Richtung wirkende Eigengewicht ist eine statische Last, die horizontalen Winddrücke und die beim Läuten der Glocke auftretenden Kräfte sind dynamische Lasten.

Ein Glockenturm ist ein schwingungsfähiges Gebilde. Die Turm-Biege-eigenfrequenzen (Grundton) liegen im Bereich von 1 bis 2 Hz, die Läutefrequenzen der Glocken liegen bei 0,3 bis 0,6 Hz. Die durch das Läuten der Glocke entstehende Horizontalkraft-Komponente H hat einen periodischen Verlauf.

Bei Übereinstimmung der Grundbiege-eigenfrequenz eines Glockenturmes mit irgendeiner Harmonischen der Horizontalkraft-Komponente H der Glocke (Resonanzfall) treten große Schwingamplituden auf. Die Amplituden können an der Spitze des Glockenturmes bis zu einigen Zentimetern betragen.

Der Resonanzfall kann die Sicherheit des Glockenturmes in Frage stellen (unzulässig große Spannungen am Fundament, Risse am Bauwerk usw.).

Der sicherste Weg zur Vermeidung der Resonanzgefahr ist eine Schwingungsberechnung vor dem Bau des Glockenturmes. Die Bauingenieure begnügen sich aber meist mit einer statischen Berechnung, die mit einer Vielfachen der Horizontalkraft-Komponente der Glocke durchgeführt wird.

Diese statische Berechnungsart ist nicht gerechtfertigt, weil durch die Vervielfachung der Horizontalkraft die Eigenfrequenz des Turmes nicht berücksichtigt wird.

Meistens stellt man nach dem Bau des Turmes fest, daß der Turm beim Läuten der Glocke unzulässig beansprucht wird. In diesem Falle versucht man mit nachträglichen Abhilfemaßnahmen (z.B. mit Gegenpendel u.a.) die Beanspruchung des Turmes zu verringern.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer solchen Abhilfemaßnahme.

Der Ausgangspunkt dieser neuen Abhilfemaßnahme ist die Schwingungsfähigkeit von Flüssigkeiten in Behältern. Durch die harmonische Bewegung des Behälters führt die darin befindliche Flüssigkeit auch harmonische Bewegungen aus. Mit Hilfe der Behältergeometrie kann man für die Flüssigkeitsmenge ein mechanisches Ersatzsystem bilden, dessen Schwingungsverhalten dem der Flüssigkeit entspricht. Dieses aus Federn, Massen und Dämpfern bestehende System kann als ein dynamischer Schwingungsdämpfer betrachtet werden.

In dieser Arbeit wird der Glockenturm als werkstoffgedämpfter und elastisch gelagerter Balken angenommen und das Schwingungsverhalten des Balkens mit dem dynamischen Schwingungsdämpfer untersucht.

1. DIE GLOCKE ALS SCHWINGUNGSERREGER DES GLOCKENTURMES

1.1. Beim Läuten der Glocke auftretende Kräfte

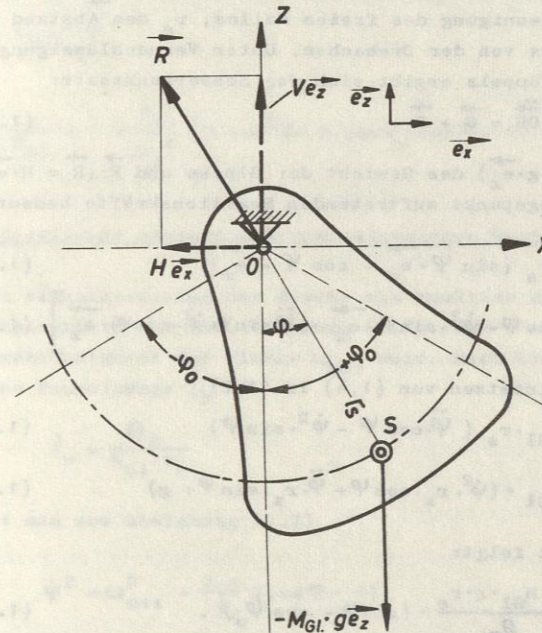


Bild 1.1: Die Glocke als physisches Pendel

Bild 1.1 zeigt die Glocke als physisches Pendel. Die Drehachse der Glocke ist die Y-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems. Als äußere Kraft wirkt die Erdschwere $(-M_{Gl} \cdot g \cdot \vec{e}_z)$. Zur Vereinfachung kann man voraussetzen, daß Schwerpunkt S und Aufhängepunkt O in der X-Z-Ebene liegen.

Die Bewegung der Glocke wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\Theta_y \cdot \ddot{\varphi} = - M_{G1} \cdot g \cdot r_s \cdot \sin \varphi \quad (1.1)$$

Es bedeuten Θ_y das Massenträgheitsmoment der Glocke mit dem Glockenjoch, bezogen auf die Y-Achse, φ den Glockenwinkel, M_{G1} die Glockenmasse, g die Beschleunigung des freien Falles, r_s den Abstand des Glockenschwerpunktes von der Drehachse. Unter Vernachlässigung der Masse des Glockenklöppels ergibt sich der Schwerpunktsatz:

$$M_{G1} \cdot \ddot{\vec{OS}} = \vec{G} + \vec{R} \quad (1.2)$$

wobei \vec{G} ($\vec{G} = - M_{G1} \cdot g \cdot \vec{e}_z$) das Gewicht der Glocke und \vec{R} ($\vec{R} = H \cdot \vec{e}_x + V \cdot \vec{e}_z$) die im Aufhängepunkt auftretenden Reaktionskräfte bedeuten. Mit

$$\vec{OS} = r_s (\sin \varphi \cdot \vec{e}_x - \cos \varphi \cdot \vec{e}_z) \quad (1.3)$$

$$\text{und } \ddot{\vec{OS}} = r_s \cdot \left[(\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi) \cdot \vec{e}_x + (\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi) \cdot \vec{e}_z \right] \quad (1.4)$$

gewinnt man nach Einsetzen von (1.4) in (1.2):

$$H = M_{G1} \cdot r_s (\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi) \quad (1.5)$$

$$V = M_{G1} \cdot (\dot{\varphi}^2 \cdot r_s \cdot \cos \varphi + \ddot{\varphi} \cdot r_s \cdot \sin \varphi + g) \quad (1.6)$$

Aus dem Energiesatz folgt:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2 M_{G1} \cdot g \cdot r_s}{\Theta_y} \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (1.7)$$

wobei φ_0 der größte Ausschlagswinkel der Glocke ist. Mit den Gleichungen (1.1) und (1.7) ergeben sich die endgültigen Ausdrücke für die Horizontalkraft H und für die Vertikalkraft V:

$$H = - \frac{M_{G1} \cdot g \cdot r_s^2}{\Theta_y} (3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi) \quad (1.8)$$

$$V = M_{G1} \cdot g \cdot \left[1 + \frac{M_{G1} \cdot r_s^2}{\Theta_y} (3 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi - 1) \right] \quad (1.9)$$

Durch Einführen der Größen, Trägheitsradius r_i ($r_i = \sqrt{\Theta_y / M_{G1}}$) und Glockengewicht G_{G1} ($G_{G1} = M_{G1} \cdot g$) kann man die Kraftkomponenten der Glocke in dimensionsloser Form ausdrücken

$$H^* = \frac{H}{G_{G1} \cdot \frac{r_s}{r_i}} = (3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi) = H^*(\varphi) \quad (1.10)$$

$$V^* = \frac{V}{G_{G1}} = 1 + \frac{r_s^2}{r_i^2} (3 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi - 1) = V^*(\varphi) \quad (1.11)$$

1.2. Zeitlicher Verlauf der dimensionslosen Horizontalkraft H^*

Um den Winkelausschlag der Glocke als Funktion der Zeit zu gewinnen, integriert man die Gleichung (1.7). Für $\varphi = 0$ soll die Winkelgeschwindigkeit der Glocke ω_{\max} sein. Nach Einführung der reduzierten Pendellänge l_r

$$l_r = \frac{\Theta_y}{M_{G1} \cdot r_s} \quad (1.12)$$

erhält man aus Gleichung (1.7)

$$\dot{\varphi}^2 = \omega_{\max}^2 + \frac{2 \cdot g}{l_r} (\cos \varphi - 1), \quad (1.13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\omega_{\max}^2 + \frac{2 \cdot g}{l_r} (\cos \varphi - 1)}, \quad (1.13a)$$

$$t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_{\max}^2 - \frac{4 \cdot g}{l_r} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (1.14)$$

Für die Lösung dieses Integrals (für $\varphi_0 < 180^\circ$) macht man die Transformation $\sin \frac{\varphi}{2} = \chi \cdot \sin \psi$, wobei $\chi = \frac{\omega_{\max}^2 \cdot l_r}{4 \cdot g} = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ ist.

Damit kann man t als $t(\psi)$ ausdrücken

$$t = t(\psi) = \sqrt{\frac{l_r}{g}} \cdot \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \cdot \sin^2 \psi}} \quad (1.15)$$

Das Integral $\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \cdot \sin^2 \psi}}$ ist ein elliptisches Integral I. Gattung und wird in der Literatur mit $F(\psi, x)$ bezeichnet. Damit wird (1.15)

$$t = t(\psi) = \sqrt{\frac{l_r}{g}} \cdot F(\psi, x) \quad (1.16)$$

Für die Dauer einer vollständigen Schwingung einer Glocke muß man mit der 4-fachen Schwingungsdauer einer Viertelperiode rechnen.

$$T_{Gl} = 4 \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} \cdot \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\omega_{max}^2 - \frac{4g}{l_r} \cdot \sin^2 \frac{\psi}{2}}} \quad (1.17)$$

Die Transformation dieses Integrals mit den obengenannten Veränderlichen ergibt

$$T_{Gl} = 4 \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} \int_0^{\psi = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \cdot \sin^2 \psi}} \quad (1.18)$$

Das Integral mit der konstanten oberen Grenze $(\frac{\pi}{2})$ bezeichnet man mit $K(x)$ (vollständiges elliptisches Integral I. Gattung).

Damit wird die Schwingungsdauer

$$T_{Gl} = 4 \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} \cdot K(x) \quad (1.19)$$

Die Werte von $F(\psi, x)$ und $K(x)$ können den Funktionstafeln z.B. von Jahnke und Emde [6] entnommen werden.

Nun können H^* und V^* als Funktionen von t dargestellt werden. Vergleiche Bild (1.2)

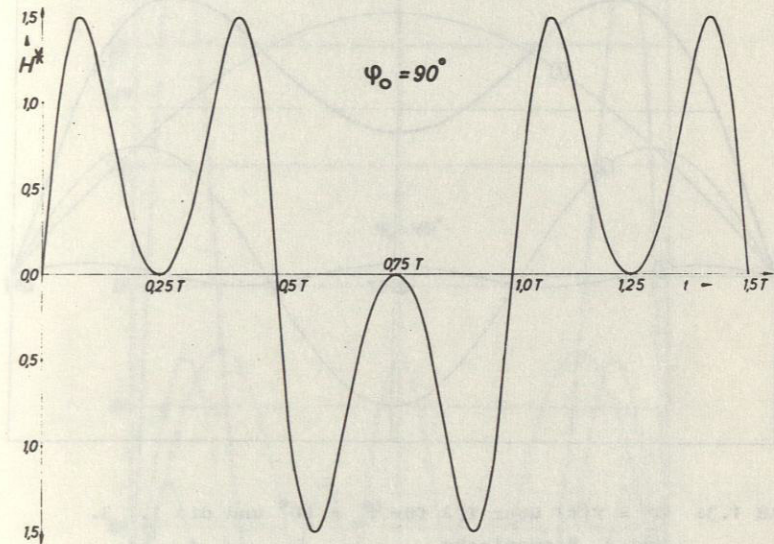


Bild 1.2: Zeitlicher Verlauf der dimensionslosen Horizontalkraft H^* für $\psi_0 = 90^\circ$

Diese periodische Funktion $H^*(t)$ hat eine ungerade Symmetrie ($H^*(-t) = -H^*(t)$). In der Fourier-Entwicklung verschwinden die Koeffizienten der \cos -Glieder. Man kann also die Funktion $H^*(t)$ als Reihe in der Form

$$H^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (1.20)$$

schreiben. Außerdem gilt $H^*(t + T/2) = -H^*(t)$. Die Kurvenform wiederholt sich nach Durchlaufen einer Viertelperiode. Deshalb treten bei der Fourier-Entwicklung nur die Harmonischen ungerader Ordnung $n = 1, 3, 5 \dots$ auf.

$$H^*(t) = b_1 \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t + b_3 \cdot \sin 3\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + b_5 \cdot \sin 5 \left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot t \dots \quad (1.21)$$

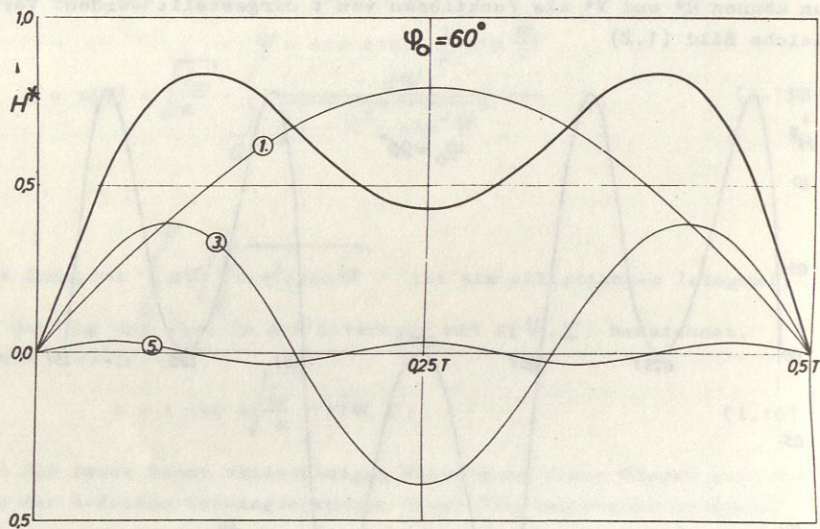


Bild 1.3: $H^* = f(t)$ über $T/2$ für $\varphi_0 = 60^\circ$ und die 1., 3. und 5. Harmonische

Die Bilder 1.3 und 1.4 zeigen die Funktion $H^*(t)$ über einer halben Periode für $\varphi_0 = 60^\circ$ und $\varphi_0 = 160^\circ$ mit den zugehörigen Harmonischen. Bild 1.5 zeigt die Abhängigkeit der Fourier-Koeffizienten der dimensionslosen Horizontalkraft vom größten Ausschlagwinkel φ_0 der Glocke. In dem Bereich $\varphi_0 = 0^\circ$ bis $\varphi_0 = 90^\circ$ sind die 1. und 3. Harmonische am größten, während die höheren Harmonischen vernachlässigbar klein sind. Die in Mitteleuropa verwendeten Glockenausschlagwinkel betragen bis zu $\varphi_0 = 90^\circ$, deshalb sind bei der Schwingungsberechnung der Glocke nur die 1. und 3. Harmonische von Bedeutung.

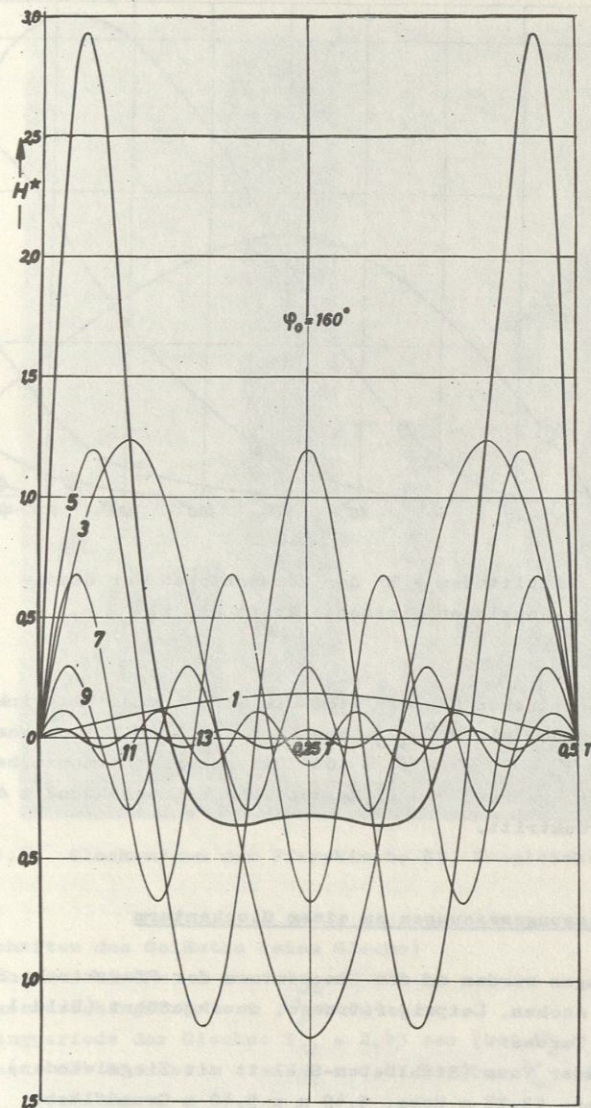


Bild 1.4: $H^* = f(t)$ über $T/2$ für $\varphi_0 = 160^\circ$ mit den Harmonischen 1, 3, 5, 7, 9, 11 und 13

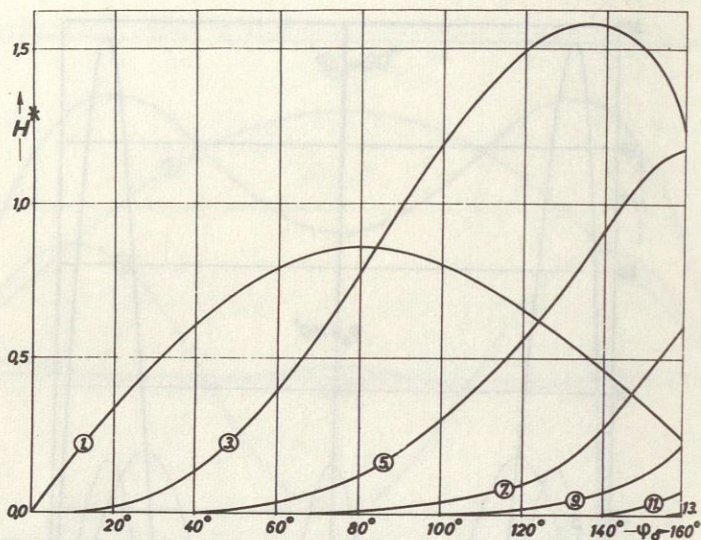


Bild 1.5: Amplituden $\pm H^*$ der Harmonischen der dimensionslosen Horizontalkraft als $f(\varphi_0)$

In angelsächsischen Ländern sind die Glockenausschlagwinkel φ_0 meistens größer als 90° [2]. Man kann aus Bild 1.5 ersehen, daß im Bereich $\varphi_0 = 90^\circ$ bis $\varphi_0 = 160^\circ$ die höheren Harmonischen große Werte haben, während die 1. Harmonische mit zunehmendem Ausschlagwinkel zurücktritt.

1.3. Schwingungsmessungen an einem Glockenturm

Die Messungen wurden an dem Glockenturm der Pfarrkirche St. Fronleichnam, Aachen, Leipzigerstrasse, durchgeführt (Bild 1.6).

Daten des Turmes:

Freistehender Turm (Stahlbeton-Skelett mit Ziegelwänden)
Abmessungen: 42,78 m Höhe, 5,40 m x 5,40 m Grundfläche

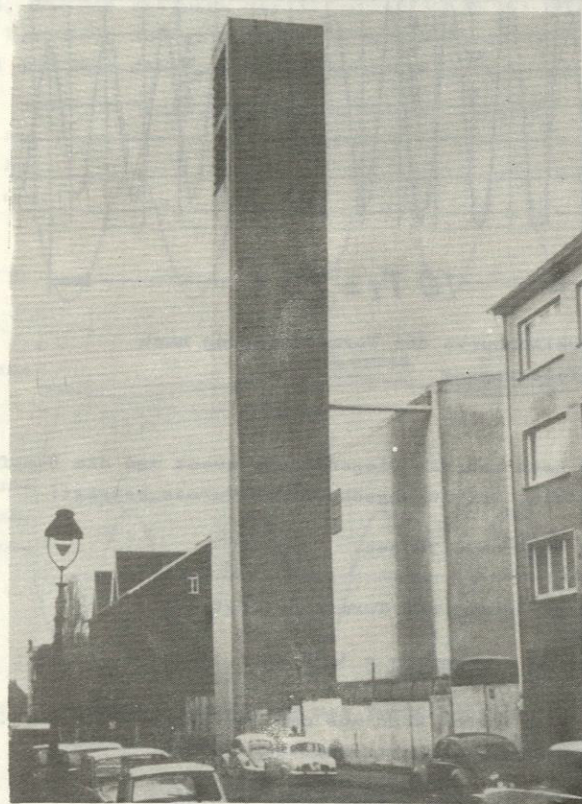


Bild 1.6: Glockenturm der Pfarrkirche St. Fronleichnam

Eigenschaften des Geläutes (eine Glocke)

Gewicht der Glocke: $G_{Gl} = 3000 \text{ kp}$
Glockenausschlagwinkel: $\varphi_0 \approx 60^\circ$
Schwingperiode der Glocke: $T_{Gl} = 2,43 \text{ sec}$ (bei $\varphi_0 = 60^\circ$)
Frequenz der Glocke: $f_{Gl} = 0,41 \text{ Hz}$ (bei $\varphi_0 = 60^\circ$)

Die Schwingungsmessungen wurden auf der Plattform des Glockenstuhls durchgeführt. Bild 1.7 zeigt die aufgenommene Abklingkurve des Glockenturmes (bei ruhender Glocke), nach Stoßanregung des Turmes in Höhe des Glockenstuhls.

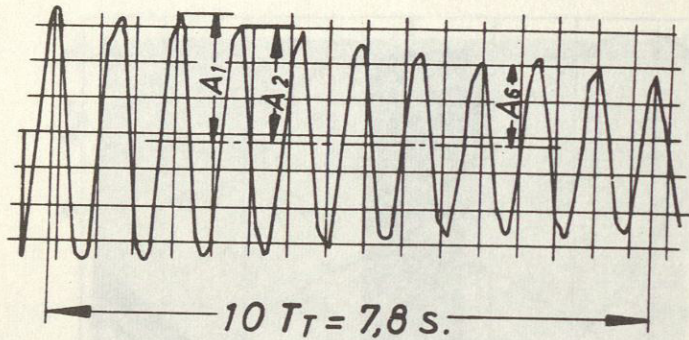


Bild 1.7: Abklingkurve der Turmschwingung nach Stoßerregung

Aus Bild 1.7 kann man die Biegeeigenfrequenz und die Dämpfung des Turmes ermitteln. Schwingungsdauer des Turmes beträgt:

$$T_T = \frac{7,8}{10} \text{ s} = 0,78 \text{ sec.}$$

Die Biegeeigenfrequenz des Turmes beträgt:

$$f_{eT} = \frac{1}{T_T} = \frac{1}{0,78 \text{ sec}} = 1,28 \text{ Hz}$$

Die Dämpfung des Turmes kann aus der Abklingkurve (Bild 1.6) durch das logarithmische Dekrement ermittelt werden:

$$\delta_T = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{A_1}{A_{n+1}} = \frac{1}{5} \cdot \ln \frac{18}{11,8} = 0,0845 \quad (1.22)$$

Mit der Annahme der linearen Dämpfung kann man die dimensionslose Dämpfungszahl des Turmes bestimmen

$$D_T = \frac{\delta_T}{\sqrt{4\pi^2 + \delta_T^2}} = \frac{0,0845}{2 \cdot \pi} = 0,0135 \quad (1.23)$$

Bild 1.8a zeigt die erzwungene Schwingung auf der Plattform des Glockenstuhls während des Läutens. Durch die Schwingungsanalyse erhält man die 1. Harmonische mit der Schwingamplitude $A_1 = 0,366$ mm (Bild 1.8b) und die 3. Harmonische mit der Schwingamplitude $A_3 = 2,21$ mm (Bild 1.8c).

Man sieht, daß die Frequenz der 3. Harmonischen der Glockenkraft ($3 f_{G1} = 1,23$ Hz), in der Nähe der Turmeigenfrequenz ($f_{eT} = 1,28$ Hz) liegt und der Turm daher zu kräftigen Schwingungen angeregt wird.

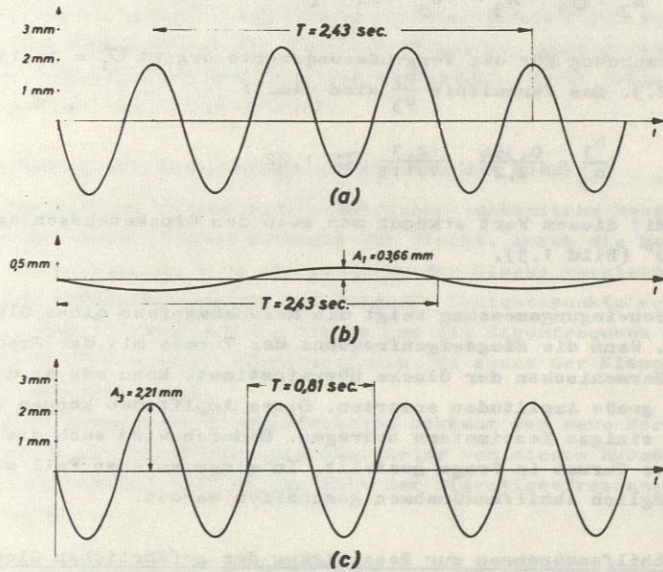


Bild 1.8: Erzwungene Schwingung des Turmes mit der 1. und 3. Harmonischen

Man kann auch durch die Auswertung der Schwingungsmessungen das Verhältnis der Horizontalkraftamplituden b_1/b_3 bilden. Die dimensionslose Horizontalkraft der Glocke kann in der Form

$$H^*(t) = b_1 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,41) t + b_3 \cdot \sin(2\pi \cdot 1,23) t \quad (1.24)$$

gebildet werden. Wenn man die Vergrößerungswerte für die erste und dritte Harmonische in der Form

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f_{G1}}{f_T}\right)^2\right]^2 + \left(2D_T \cdot \frac{f_{G1}}{f_T}\right)^2}}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{3 f_{G1}}{f_T}\right)^2\right]^2 + \left(2D_T \cdot \frac{3 f_{G1}}{f_T}\right)^2}} \quad (1.25)$$

definiert, kann man für das Verhältnis der Horizontalkraftamplitudenschreiben:

$$\frac{b_1 \cdot \nu_1}{b_3 \cdot \nu_3} = \frac{A_1}{A_3}, \quad \frac{b_1}{b_3} = \frac{A_1}{A_3} \cdot \frac{\nu_3}{\nu_1} \quad (1.26)$$

Die Berechnung für die Vergrößerungswerte ergibt $\nu_1 = 1,115$ und $\nu_3 = 12,3$. Das Verhältnis $\frac{b_1}{b_3}$ wird damit:

$$\frac{b_1}{b_3} = \frac{0,366}{2,21} \cdot \frac{12,3}{1,115} \approx 1,82$$

sein. Mit diesem Wert erkennt man auch den Glockenausschlagwinkel $\varphi_0 = 60^\circ$ (Bild 1.5).

Diese Schwingungsmessung zeigt die Resonanzgefahr eines Glockenturmes. Wenn die Biegeeigenfrequenz des Turmes mit der Frequenz einer Harmonischen der Glocke übereinstimmt, kann man an der Turmspitze große Amplituden erwarten. Diese Amplituden können Werte bis zu einigen Zentimetern betragen. Dadurch wird auch die Sicherheit des Turmes in Frage gestellt. In einem solchen Fall müssen nachträglich Abhilfemaßnahmen geschaffen werden.

1.4. Abhilfemaßnahmen zur Beseitigung der gefährlichen Glockenturmschwingungen

a) Versteifen des Turmes

Mit dieser Maßnahme ändert man die Biegeeigenfrequenz des Turmes. Gleichzeitig werden die Biegespannungen an der gefährdeten Stelle kleiner. Eine Versteifung des Turmes erfordert großen Aufwand und die architektonische Schönheit des Turmes wird dabei beeinträchtigt.

b) Ausgleichspendel

Ein Ausgleichspendel erzeugt Kräfte, die den Horizontalkräften einer Glocke entgegengesetzt gerichtet sind. Damit wird die Gesamthorizontalkraft Null. Eine solche Maßnahme ist meist mit großem Kostenaufwand verbunden.

c) Veränderung des Glockenschwerpunktabstandes von der Drehachse durch gekrüpfte Glockenaufhängung.

Durch die Änderung (im allgemeinen Verkleinerung) des Schwerpunktabstandes wird die Frequenz der Glocke geändert. Dadurch wird bei gleichem Ausschlagwinkel der Glocke der Ausschlagweg bis zum Auftreffen des Klöppels auf die Glocke verkleinert. Infolgedessen wird der Klöppel nicht mehr kräftig anschlagen. Diese Maßnahme beeinträchtigt die Klangschönheit.

d) Veränderung des Massenträgheitsmomentes der Glocke

Durch eine auf dem Glockenjoch angebrachte zusätzliche Masse ändert man das Massenträgheitsmoment der Glocke. Durch die Massenträgheitsvergrößerung wird die Frequenz der Glocke verkleinert [4]. Bei diesem Verfahren muß man auf folgende Gesichtspunkte achten:

- 1) Die geänderte Frequenz der Glocke und die Eigenfrequenz des Klöppels dürfen nicht übereinstimmen, da sonst der Klöppel nicht mehr anschlägt.
- 2) Durch die geänderte Glockenfrequenz bekommt man neue Horizontalkräfte mit neuen Harmonischen. Keine von diesen harmonischen Frequenzen darf in der Nähe der Biegeeigenfrequenz des Turmes sein.

e) In einem Behälter befindliche Flüssigkeitsmasse als dynamischer Schwingungsdämpfer

Bei diesem Verfahren stellt man einen Behälter mit Flüssigkeit (normalerweise Wasser) an einer hochgelegenen Stelle des Turmes (möglichst in der Nähe des Glockenstuhls) auf. Die Abmessungen des Behälters und die Höhe der Flüssigkeit kann man so wählen, daß die Eigenfrequenz der Oberflächenwellen der Flüssigkeit mit der Biegeeigenfrequenz des Turmes ungefähr übereinstimmt. Im Prinzip handelt es sich um einen dynamischen Schwingungsdämpfer. Die Einzelheiten und die Theorie werden im folgenden ausführlich beschrieben.

2. FLÜSSIGKEITSSCHWINGUNGEN IN BEHÄLTERN

2.1. Allgemeines

Die Flüssigkeit in einem Behälter mit freier Oberfläche ist ein schwingungsfähiges Gebilde. Durch die harmonische Bewegung des Behälters führt die Flüssigkeit im Behälter ebenfalls harmonische Bewegungen aus.

Über das Problem der Flüssigkeitsschwingungen für verschiedene Behälterformen gibt es eine umfassende Literatur [7] bis [11]. Es werden hier die Flüssigkeitsschwingungen in rechteckigen Behältern behandelt.

Für die Lösung dieses Schwingungsproblems wird zunächst die Flüssigkeit als ungedämpft angenommen. Durch diese Annahme kann man die sehr nützlichen mathematischen Hilfsmittel der Potentialtheorie benutzen.

Auf diese Weise erhaltene Lösungen enthalten für die Eigenfrequenzen der Flüssigkeit Unendlichkeitsstellen. Um die endlichen Schwingungsgrößen der gedämpften Schwingungen zu bekommen, wird eine äquivalente Dämpfung in das System eingeführt.

2.2. Erzwungene Schwingungen einer reibungslosen Flüssigkeit in einem translatorisch bewegten, rechteckigen Behälter

Bild 2.1 zeigt einen rechteckigen Behälter mit der Flüssigkeitshöhe h . Die Länge und Breite des Behälters sollen mit a und b bezeichnet werden. $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ ist ein ortsfestes rechtwinkliges Koordinatensystem.

Die translatorische Bewegung des Behälters und des damit verbundenen Koordinatensystems $OXYZ$ sei in der Form

$$\bar{O}O = x_0(t) = A \cdot \sin \omega t \quad (2.1)$$

dargestellt, wobei der Mittelpunkt O des bewegten Koordinatensystems die geometrische Mitte der stillstehenden Flüssigkeitsmasse ist.

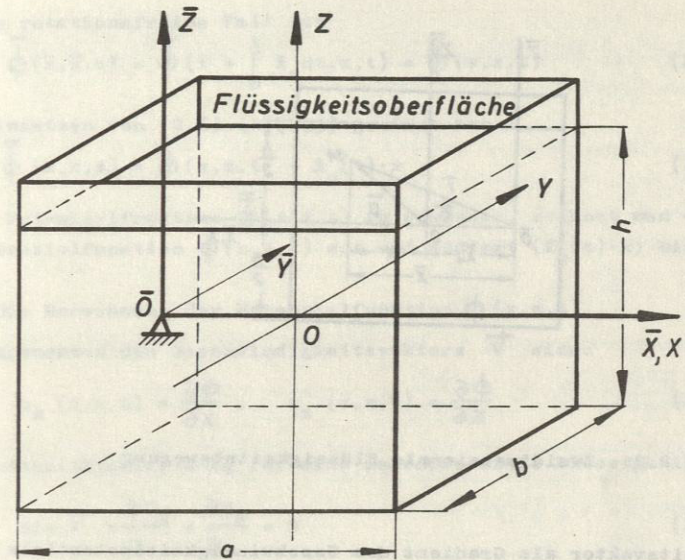


Bild 2.1: Rechteckiger Behälter mit Flüssigkeit

Für die Vereinfachung des Problems werden folgende Annahmen getroffen:

- a) Die Flüssigkeit ist inkompressibel und reibungsfrei
- b) die Neigung der freien Oberfläche ist klein
- c) die Flüssigkeitsbewegung ist rotationsfrei
- d) die Bewegungsfrequenz des Behälters ist nicht zu nahe bei den Eigenfrequenzen der Flüssigkeit

Wegen der horizontalen Bewegung des Behälters verschwinden die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen in \bar{Y} -Richtung. Deshalb kann man die Flüssigkeitsbewegung als zweidimensional betrachten (Bild 2.2).

\bar{V} soll den Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit im bewegten und \bar{V} im ortsfesten Koordinatensystem darstellen. Wegen der Annahme einer rotationsfreien Strömung kann man den Geschwin-

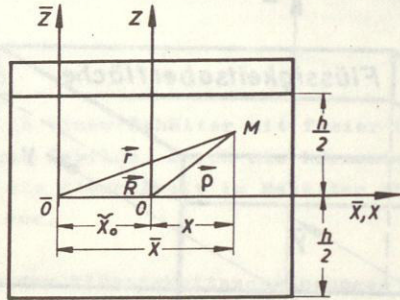


Bild 2.2: Zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung

digkeitsvektor als Gradient des Geschwindigkeitspotentials darstellen.

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \text{grad } \phi(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

Mit dieser Geschwindigkeitspotentialfunktion kann man die Flüssigkeitsbewegung in dem bewegten Koordinatensystem OXYZ darstellen (relative Bewegung). In Bild 2.2 zeigt \vec{r} die absolute und \vec{R} die relative Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens. Für den rotationsfreien Fall kann man

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\xi} \quad (2.3)$$

schreiben. In anderer Schreibweise ist

$$\vec{v}(\bar{x}, \bar{z}, t) = \vec{v}(x, z, t) + \dot{\xi}_0(t) \cdot \vec{e}_x \quad (2.4)$$

Wenn man die Potentialfunktion für die absolute Bewegung in dem ortsfesten Koordinatensystem mit $\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{z}, t)$ und in dem bewegten Koordinatensystem mit $\phi(x, z, t)$ bezeichnet, kann man die Gleichung (2.4) in der Form

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{z}, t) = \phi(x, z, t) + \dot{\xi}_0(t) \cdot x \quad (2.5)$$

ausdrücken.

Für den rotationsfreien Fall ist

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{z}, t) = \bar{\phi}\left(x + \int_0^t \dot{\xi}_0 dt, z, t\right) = \bar{\phi}(x, z, t) \quad (2.6)$$

Nach Einsetzen von (2.6) in (2.5) gewinnt man

$$\bar{\phi}(x, z, t) = \phi(x, z, t) + \dot{\xi}_0(t) \cdot x \quad (2.7)$$

Um die Potentialfunktion $\bar{\phi}(x, z, t)$ zu gewinnen, rechnet man erst die Potentialfunktion $\phi(x, z, t)$ aus und addiert $(\dot{\xi}_0(t) \cdot x)$ hinzu.

2.2.1 Die Berechnung der Potentialfunktion $\phi(x, z, t)$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} sind:

$$u_x(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_z(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.8)$$

Die Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Flüssigkeit

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

liefert die Laplace'sche Gleichung zur Bestimmung der Funktion

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

Die Bernoulli'sche Gleichung lautet [7]:

$$\frac{p}{\rho_F} + g \cdot z + \frac{v^2}{2} = \frac{-\partial \phi}{\partial t} \quad (2.11)$$

wobei p der Druck und ρ_F die Dichte der Flüssigkeit ist. Das Glied $\frac{v^2}{2}$ ist vernachlässigbar klein gegenüber den anderen Gliedern, d.h. man kann

$$p = -\rho_F \cdot g \cdot z - \rho_F \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \quad (2.12)$$

schreiben. Die Gleichung der freien Oberfläche sei in der Form

$$\xi = \xi(x, t) \quad (2.13)$$

dargestellt. Wenn man die Gleichung (2.12) für die freie Oberfläche schreibt und anschließend nach t differenziert, erhält man:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\xi} = -\rho_F \cdot g \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{\xi} - \rho_F \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{\xi} \quad (2.14)$$

An der freien Oberfläche ist $p = p_0$ (atmosphärischer Druck) und man kann $(\partial p / \partial t)_{\xi} = 0$ einsetzen.

Die Oberflächenneigung und die Wellenamplituden sind sehr klein. Deshalb kann man in Gleichung (2.14) für ξ den Wert $h/2$ (stillstehende Flüssigkeitsoberfläche) einsetzen. Mit der kinematischen Bedingung für die Oberfläche

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{\xi} \quad (2.15)$$

kann man die Gleichung (2.14) in endgültiger Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \left(x, \frac{h}{2}, t \right) + g \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \left(x, \frac{h}{2}, t \right) = 0 \quad (2.16)$$

Die Randbedingungen für die Lösung der Gleichung (2.16) sind:

a) die Geschwindigkeitskomponenten u_x sind an den Behälterwänden ($x = \pm \frac{a}{2}$) gleich Null.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\pm \frac{a}{2}, z, t \right) = 0 \quad (2.17)$$

b) die Geschwindigkeitskomponenten u_z sind am Behälterboden ($z = -\frac{h}{2}$) gleich Null.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \left(x, -\frac{h}{2}, t \right) = 0 \quad (2.18)$$

Die Lösung der Gleichung (2.16)

Mit Hilfe des Produktansatzes für die Potentialfunktion ϕ [8]

$$\phi = \sum T_n(t) \cdot X_n(x) \cdot Z_n(z) \quad (2.19)$$

kann man aus (2.16) die allgemeine Lösung finden. Die Bedingungen (2.10), (2.17) und (2.18) erfüllen sich mit

$$X_{2n}(x) \cdot Z_{2n}(z) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \cdot \text{Cosh}\left[\frac{2n\pi}{a} \cdot \left(z + \frac{h}{2}\right)\right] \quad (2.20)$$

$$X_{2n+1}(x) \cdot Z_{2n+1}(z) = \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right] \cdot \text{Cosh}\left[\frac{(2n+1)\pi}{a} \cdot \left(z + \frac{h}{2}\right)\right] \quad (2.20a)$$

Um die entsprechende T_n -Funktion zu finden, entwickelt man x in eine Fourierreihe:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4a}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right] \quad (2.21)$$

Wenn man die Potentialfunktion mit dieser Entwicklung (2.21) in die Gleichung (2.16) einsetzt und die Zwischengrößen

$$\mathcal{G}_{2n}^2 = \frac{2n\pi}{a} \cdot g \cdot \text{Tanh}\left[\frac{2n\pi h}{a}\right], \quad (2.22)$$

$$\mathcal{G}_{2n+1}^2 = \frac{(2n+1)\pi}{a} \cdot g \cdot \text{Tanh}\left[\frac{(2n+1)\pi h}{a}\right], \quad (2.22a)$$

$$b_{2n+1} = -(-1)^n \cdot \frac{4a}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{\text{Cosh}\left[\frac{(2n+1)\pi h}{a}\right]}, \quad (2.23)$$

definiert, erhält man:

$$\ddot{T}_{2n} + \mathcal{G}_{2n}^2 \cdot T_{2n} = 0 \quad (2.24)$$

$$\ddot{T}_{2n+1} + \mathcal{G}_{2n+1}^2 \cdot T_{2n+1} = b_{2n+1} \cdot \ddot{x}_0(t) \quad (2.24a)$$

Die Lösung für das Gleichungssystem (2.24) ist

$$T_{2n} = C_{2n} \cdot \cos \mathcal{G}_{2n} \cdot t \quad (2.25)$$

Diese Lösung ist unabhängig von der Behälterbewegung und stellt die freien Schwingungen dar.

Das zweite Gleichungssystem hat mit der Behälterbewegung $\ddot{x}_0 = \ddot{X}_0(t) = A \cdot \sin \omega t$ eine neue Form

$$\ddot{T}_{2n+1} + \mathcal{G}_{2n+1}^2 \cdot T_{2n+1} = -b_{2n+1} \cdot A \cdot \omega^3 \cdot \cos \omega t \quad (2.26)$$

Die Lösung für die Differentialgleichung (2.26) lautet

$$T_{2n+1}(t) = (-1)^n \cdot \frac{4a}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{\text{Cosh}\left[\frac{(2n+1)\pi h}{a}\right]} \cdot A \omega \frac{\omega^2}{\mathcal{G}_{2n+1}^2 - \omega^2} \cdot \cos \omega t \quad (2.27)$$

Damit lässt sich die Potentialfunktion ϕ in der Form

$$\phi = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4a}{(2n+1)^2 \pi^2} \frac{1}{\text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]} \left(\frac{\omega^2}{\zeta_{2n+1}^2 - \omega^2} \right) \quad (2.28)$$

schreiben.

Mit der Abkürzung $\omega/\zeta_{2n+1} = \eta_{2n+1}$ wird

$$\phi = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t \left[x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4 \cdot a}{(2n+1)^2 \pi^2} \frac{1}{\text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{\eta_{2n+1}^2 - 1} \right) \right] \quad (2.29)$$

2.3. Die durch die Flüssigkeitsbewegung erzeugte Kraft

Mit Hilfe der Potentialfunktion kann man den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \vec{u}_x \cdot \vec{e}_x + \vec{u}_z \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \vec{e}_z \quad (2.30)$$

und den Beschleunigungsvektor

$$\vec{b} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.31)$$

bilden. Die auf ein Volumenelement dV der Flüssigkeit ($dV = dx dy dz$) wirkende horizontale Trägheitskraft ist

$$d\vec{F}_H = - \rho_F \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{b}_x \quad (2.32)$$

Die gesamte horizontale Trägheitskraft ist

$$|\vec{F}_H| = \rho_F \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{b}_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2.33)$$

wobei ρ_F die Dichte der Flüssigkeit ist.

Wenn man für die Beschleunigung den mit der Potentialfunktion errechneten Wert

$$\bar{b}_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) = A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \cdot \frac{\cos \left[(2n+1) \frac{\pi x}{a} \right] \cdot \text{Cosh} \left[(2n+1) \frac{\pi}{a} \left(z + \frac{h}{2} \right) \right]}{\text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]} \right\} \quad (2.34)$$

einsetzt, bekommt man für die Horizontalkraft

$$F_H = \rho_F \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \cdot \frac{\text{Cosh} \left[(2n+1) \frac{\pi}{a} \left(z + \frac{h}{2} \right) \right]}{\text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]} \cos \left[\frac{(2n+1)\pi x}{a} \right] \right\} dx dy dz \quad (2.35)$$

Die Lösung des bestimmten Integrals (2.35) liefert

$$F_H = \frac{G_F}{g} \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2n+1)^3 \cdot \frac{h}{a}} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \text{Tanh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right] \right\}, \quad (2.36)$$

wobei $G_F = a \cdot b \cdot h \cdot \rho_F \cdot g$ (2.37)

das Flüssigkeitsgewicht im Behälter ist.

2.4. Das durch die Flüssigkeitsbewegung um die y-Achse des Behälters erzeugte Moment

Das Moment der Massenkraft eines Volumenelementes um die y-Achse des Behälters ist

$$\vec{dM}_y = dF_H \times (x \cdot \vec{e}_x + z \cdot \vec{e}_z) \quad (2.38)$$

Das Gesamtmoment der Flüssigkeit wird

$$|\vec{M}_y| = \rho_F \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{b}_x \cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \rho_F \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{b}_z \cdot x \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.39)$$

Die Beschleunigungskomponente \vec{b}_x ist bekannt (2.34). Die Beschleunigungskomponente \vec{b}_z kann aus der Potentialfunktion $\bar{\phi}$ abgeleitet werden:

$$\vec{b}_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) = A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \cdot \frac{\sin \left[\frac{(2n+1)\pi x}{a} \right] \cdot \text{Sinh} \left[\frac{(2n+1)\pi}{a} \cdot \left(z + \frac{h}{2} \right) \right]}{\text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]} \right\} \quad (2.40)$$

Wenn man (2.34) und (2.40) in die Gleichung (2.39) einsetzt, erhält man:

$$|\vec{M}_y| = \rho_F \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right)^2 \right\}$$

$$\cdot \frac{\cos \left[\frac{(2n+1)\pi x}{a} \right] \text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi}{a} \cdot \left(z + \frac{h}{2} \right) \right]}{\text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]} \cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{4}{\pi(2n+1)} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \frac{\sin \left[\frac{(2n+1)\pi x}{a} \right] \text{Sinh} \left[\frac{(2n+1)\pi}{a} \cdot \left(z + \frac{h}{2} \right) \right]}{\text{Cosh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]} dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.41)$$

Nach der Lösung der Integrale erhält man für das Moment in dimensionsloser Form

$$\frac{|\vec{M}_y|}{G_F \cdot h} = \frac{A}{g} \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \left\{ \frac{1}{12 \left(\frac{h}{a} \right)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \text{Tanh} \left[\frac{(2n+1)\pi h}{a} \right]}{\pi^3 \cdot (2n+1)^3 \cdot \frac{h}{a}} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{Tanh} \left[(2n+1) \cdot \frac{\pi h}{2a} \right]}{(2n+1) \cdot \frac{\pi h}{2a}} + \frac{g}{h \cdot G_{2n+1}^2} \right] \right\} \quad (2.42)$$

2.5. Das Ersatzsystem (mechanisches Modell) für die beschriebene Flüssigkeitsschwingung

Für die weiteren Schwingungsberechnungen ist es zweckmäßig, ein Ersatzsystem für die Flüssigkeit mit der gegebenen Behälterbewegung zu bilden. Das Ersatzsystem ist ein Feder-Masse-System (Bild 2.3a).

Jede Schwingungsform wird beim Ersatzsystem mit einer Feder-Masse-Paarung dargestellt. Die Eigenfrequenz der n-ten Paarung (c_n, m_n) ist

$$\sqrt{\frac{c_n}{m_n}} = G_{2n+1} \quad (2.43)$$

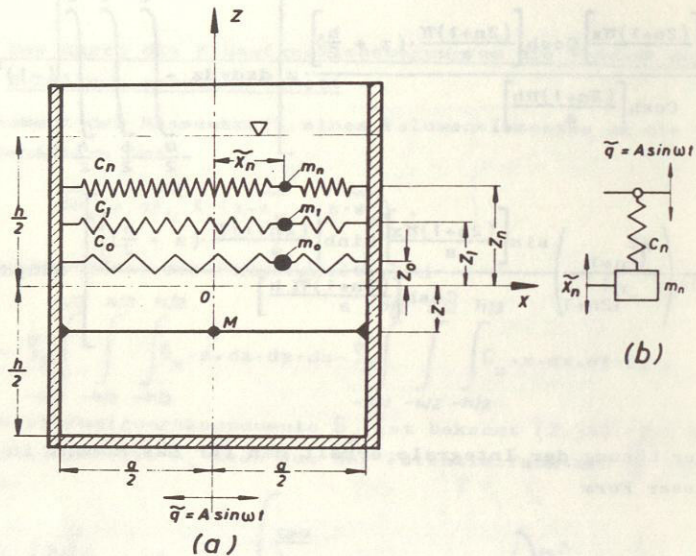


Bild 2.3: Mechanisches Modell für Flüssigkeit

Die Entfernung der Ersatzmasse m_n von der x -Achse ist mit z_n bezeichnet. Ein Teil der Flüssigkeit nimmt an der Schwingung nicht teil. Diese Masse M bewegt sich wie ein starrer Körper und liegt unterhalb der x -Achse mit der Entfernung Z [9].

2.5.1 Die horizontale Kraft (F_H^*) durch das Ersatzsystem

Jede Feder-Masse-Paarung des Ersatzsystems wird mit der gleichen Fußpunkterregung (Bild 2.)b) $\tilde{q} = A \cdot \sin \omega t$ erregt. Durch die Einführung von

$$\tilde{x}_{rel\ n} = \tilde{x}_n - \tilde{q} = x_{rel\ n} \cdot \sin \omega t \quad (2.44)$$

drückt man die Vergrößerungsfunktion für die Fußpunkterregung in der Form

$$\frac{x_{rel\ n}}{A} = \frac{\omega^2}{G_{2n+1}^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{G_{2n+1}^2}} = \frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \quad (2.45)$$

aus.

Die Horizontalkraft des Ersatzsystems ist die Summe der Federkräfte und der Trägheitskraft der festen Masse:

$$F_H^* = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_{rel\ n} \cdot c_n - M \cdot \ddot{\tilde{q}} \quad (2.46)$$

Wenn man (2.45) in (2.46) einsetzt und $c_n = m_n \cdot G_{2n+1}^2$ schreibt, ergibt sich

$$F_H^* = \frac{G_F}{g} \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \left\{ \frac{M}{M_F} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{M_F} \cdot \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{M_F} \right\} \quad (2.47)$$

2.5.2 Das Moment (M_y^*) um den Punkt O durch das Ersatzsystem.

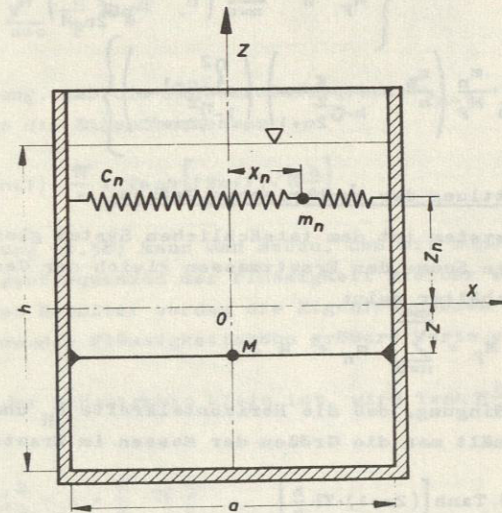


Bild 2.4: Zur Bestimmung des Momentes der n-ten Masse

Das Moment des Ersatzsystems kann in der Form

$$M_y^* = \sum_{n=0}^{\infty} F_{H_n}^* \cdot z_n + F_{H_M}^* \cdot Z + \sum_{n=0}^{\infty} m_n \cdot g \cdot x_{rel\ n} \quad (2.48)$$

ausgedrückt werden (Bild 2.4), wobei F_{Hn}^* die horizontale Kraft der n-ten Masse und F_{HM} die Trägheitskraft der festen Masse sind. Mit

$$F_{Hn}^* = \frac{G_F}{g} \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \left\{ \frac{m_n}{M_F} + \frac{m_n}{M_F} \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \right\} \quad (2.49)$$

und

$$F_{HM} = \frac{G_F}{g} \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \frac{M}{M_F} \quad (2.50)$$

bekommt man das Moment in dimensionsloser Form

$$\frac{M_y^*}{G_F \cdot h} = \frac{A}{g} \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \left\{ \frac{M}{M_F} \cdot \frac{Z}{h} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_n}{h} + \frac{g}{h \cdot g_{2n+1}^2} \right) \cdot \frac{m_n}{M_F} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{M_F} \left(\frac{z_n}{h} + \frac{g}{h \cdot g_{2n+1}^2} \right) \left(\frac{\eta_{2n+1}^2}{1 - \eta_{2n+1}^2} \right) \right\} \quad (2.51)$$

2.5.3 Ermittlung der mechanischen Größen

Das Ersatzsystem ist dem tatsächlichen System gleichwertig. Deshalb muß die Summe der Ersatzmassen gleich der Gesamtflüssigkeitsmasse im Behälter sein:

$$M_F = \sum_{n=0}^{\infty} m_n + M \quad (2.52)$$

Aus der Bedingung, daß die Horizontalkräfte F_H und F_H^* gleich sein müssen, erhält man die Größen der Massen im Ersatzsystem

$$\frac{m_n}{M_F} = \frac{8 \operatorname{Tanh} \left[(2n+1) \cdot \pi \cdot \frac{h}{a} \right]}{\pi^3 \cdot (2n+1)^3 \cdot \frac{h}{a}} \quad (2.53)$$

und

$$\frac{M}{M_F} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \operatorname{Tanh} \left[(2n+1) \cdot \pi \cdot \frac{h}{a} \right]}{\pi^3 \cdot (2n+1)^3 \cdot \frac{h}{a}} \quad (2.54)$$

Die Bedingung der Gleichheit der Momente M_y und M_y^* liefert die Federsteifigkeiten c_n und die vertikalen Lagen der einzelnen Massen im Ersatzsystem. In dimensionsloser Form wird die Federsteifigkeit für die n-te Paarung

$$\frac{h \cdot c_n}{G_F} = \frac{8 \operatorname{Tanh}^2 \left[(2n+1) \pi \frac{h}{a} \right]}{\pi^2 \cdot (2n+1)^2} \quad (2.55)$$

und die vertikale Position der n-ten Masse

$$\frac{z_n}{h} = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Tanh} \left[(2n+1) \cdot \frac{h \cdot \pi}{a} \right]}{(2n+1) \cdot \frac{h \cdot \pi}{a}} \quad (2.56)$$

Die vertikale Position der festen Masse ist

$$\frac{Z}{h} = - \frac{1}{M_F} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{M_F} \cdot \frac{z_n}{h} \quad (2.57)$$

Aus der Bedingung, daß die Eigenkreisfrequenz $\zeta_{2n+1} = \sqrt{\frac{c_n}{m_n}}$ sein muß, erhält man die Eigenfrequenzen

$$\zeta_{2n+1}^2 = g \cdot (2n+1) \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \operatorname{Tanh} \left[(2n+1) \cdot \pi \frac{h}{a} \right] \quad (2.58)$$

Aus der Gleichung (2.58) kann man sehen, daß mit zunehmender Behälterlänge a die Eigenfrequenzen der Flüssigkeit kleiner werden. Bei einem bestimmten Behälter werden die Eigenfrequenzen der Flüssigkeit mit zunehmender Flüssigkeitshöhe größere Werte annehmen.

Wenn die Höhe der Flüssigkeit klein ist, wird $\operatorname{Tanh} \pi \frac{h}{a} \approx \frac{h}{a} \cdot \pi$ und folglich

$$\zeta_0^2 = g \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \pi \frac{h}{a} \quad (2.59)$$

und

$$\zeta_0 = \frac{\pi}{a} \cdot \sqrt{g \cdot h} \quad (2.59a)$$

Bild 2.5 zeigt die Größe der Massen im Ersatzsystem als Funktion der Behälterabmessungen. Mit zunehmender Flüssigkeitshöhe werden die Anteile der schwingenden Massen kleiner, während der Anteil der festen Masse sich vergrößert [9].

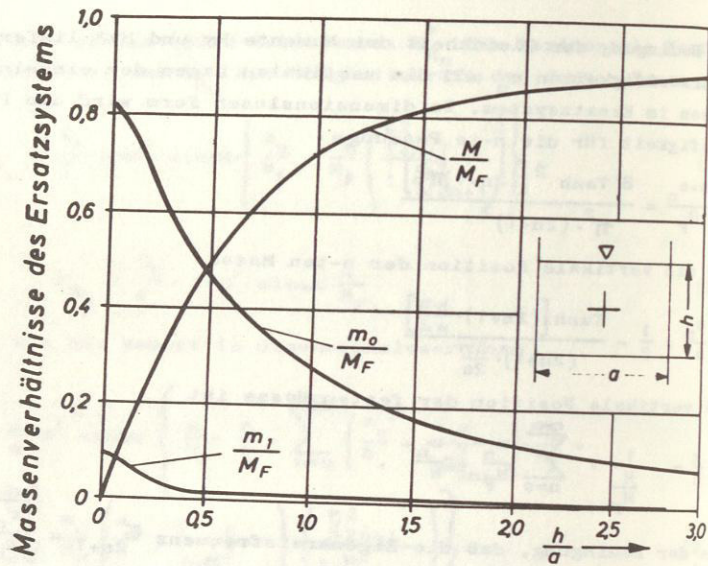


Bild 2.5: Größe der Massen im Ersatzsystem

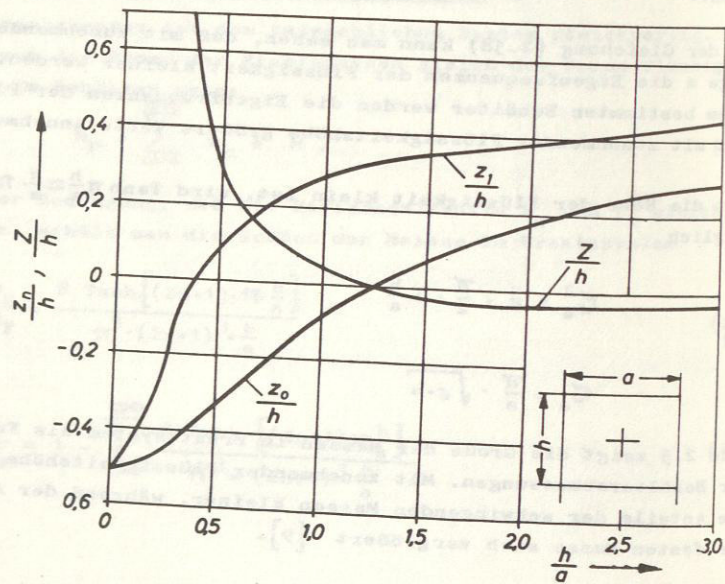


Bild 2.6: Vertikale Lagen der Massen im Ersatzsystem

Bild 2.6 zeigt die vertikalen Positionen der Massen, Bild 2.7 die Federsteifigkeiten der Federn im Ersatzsystem als Funktion der Behälterabmessungen [9].

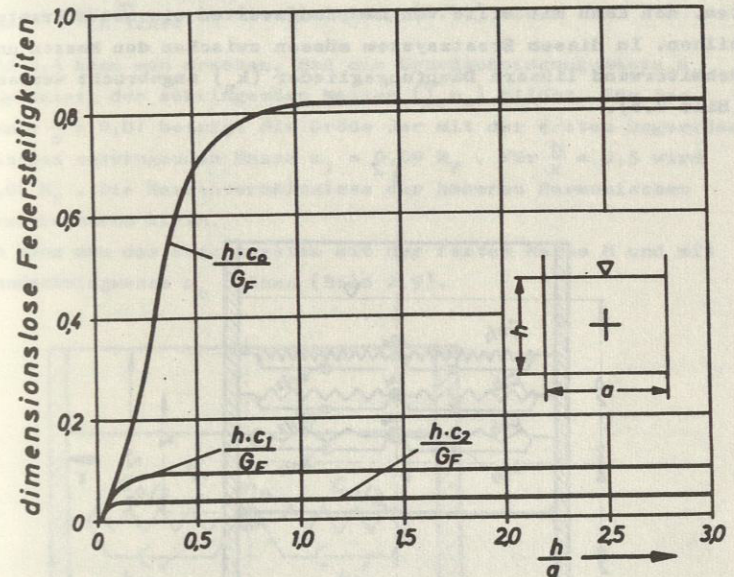


Bild 2.7: Federsteifigkeiten im Ersatzsystem

2.6. Die gedämpften Schwingungen

Die Lösungen für die Horizontalkraft und für das Moment bei einer reibungslosen Flüssigkeit haben unendlich große Werte, wenn eine Eigenfrequenz mit der Erregerfrequenz übereinstimmt (Resonanzfall).

In Wirklichkeit sind die Schwingamplituden durch die Reibung an den Behälterwänden und durch die innere Reibung der Flüssigkeit gedämpft und haben bei Resonanz endliche Werte.

Über die gedämpften Schwingungen der Flüssigkeiten gibt es verschiedene Arbeiten.

Case und Parkinson [10] untersuchten die Dämpfung der Oberflächenwellen in zylindrischen Behältern.

Keulegan [11] untersuchte das gleiche Problem für rechteckige Behälter.

Die Versuchsergebnisse dieser Arbeiten zeigen, daß die Dämpfungswerte des Wassers für die untersuchten Behältergrößen recht klein sind. Aus diesem Grunde bleiben die Eigenschwingungsformen erhalten. Man kann mit Hilfe von Dämpfungswerten ein neues Ersatzsystem bilden. In diesem Ersatzsystem müssen zwischen den Massen und der Behälterwand lineare Dämpfungsglieder (k_n) angebracht werden (Bild 2.8).

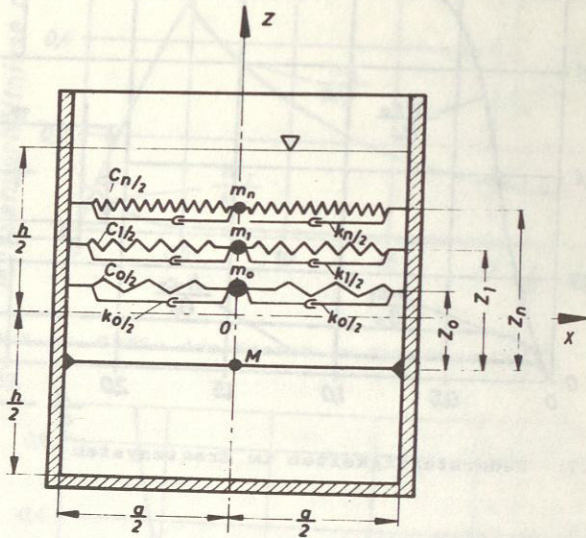


Bild 2.8: Ersatzsystem mit Dämpfungsgliedern

Die Größen und vertikalen Lagen der Ersatzmassen sowie die Federsteifigkeiten der Federn können aus dem vorherigen Ersatzsystem ohne Dämpfung übernommen werden [12]. Es ist auch zweckmäßig an Stelle der linearen Dämpfungskoeffizienten k_n die dimensionslose Dämpfungszahl

$$D_n = \frac{k_n}{2 \cdot m_n \cdot \omega_{2n+1}} \quad (2.60)$$

einzuführen.

Um die horizontale Kraft oder das Moment des neuen Ersatzsystems zu ermitteln, setzt man an Stelle der Glieder $1 - \eta_{2n+1}^2$ die Werte $1 - \eta_{2n+1}^2 + 2iD_n \cdot \eta_{2n+1}$ in die Gleichung (2.47) ein.

Aus Bild 2.5 kann man ersehen, daß die Grundschwingungsmasse m_0 den Hauptanteil der schwingenden Massen ($\sum m_n$) bildet. Für das Verhältnis $\frac{h}{a} = 0,01$ beträgt die Größe der mit der ersten ungeraden Harmonischen schwingenden Masse $m_1 = 0,09 M_F$. Für $\frac{h}{a} = 0,5$ wird $m_1 = 0,02 M_F$. Die Massenverhältnisse der höheren Harmonischen sind verschwindend klein.

Deshalb kann man das Ersatzsystem mit der festen Masse M und mit der Grundschwingungsmasse m_0 bilden (Bild 2.9).

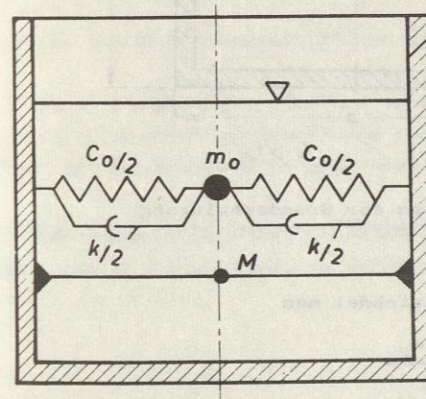


Bild 2.9: Vereinfachtes Ersatzsystem

Die Bestimmung des Dämpfungskoeffizienten

Der lineare Dämpfungskoeffizient D des mechanischen Modells kann aus Ausschwingversuchen der Flüssigkeit ermittelt werden. Man erregt einen durchsichtigen Behälter mit der Grundeigenfrequenz der darin befindlichen Flüssigkeit.

Im Resonanzfall werden die Endausschläge f_1 und f_2 der Oberflächenwellen die größten Werte annehmen (Bild 2.10). Sobald die Endausschläge den Größtwert erreicht haben, stellt man die Erregung ab und filmt dann den Ausschwingvorgang mit einer Filmkamera.

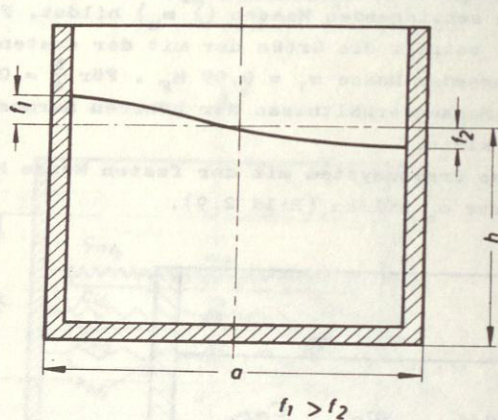


Bild 2.10: Wellenform der Grundschiwingung

Als Wellenamplitude bezeichnet man

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (2.61)$$

Am Anfang des Ausschwingvorganges ($t = 0$) sollen die Wellenenergie E_0 und die Wellenamplitude f_0 sein. Durch die Dissipation der Energie werden sie nach n Perioden oder $t = n \cdot T$ Sekunden kleiner sein und entsprechend die Werte E und f bekommen.

Durch Einführung des logarithmischen Dekrements (Kapitel 1.4) wird

$$\frac{E}{E_0} = e^{-2 \cdot \delta \cdot n} \quad (2.62)$$

Die Wellenenergie ist quadratisch proportional den Wellenamplituden. Deshalb kann man

$$\frac{f}{f_0} = e^{-\delta \cdot n} = e^{-\delta \cdot \frac{t}{T}} \quad (2.63)$$

schreiben.

Wenn man den zeitlichen Verlauf der Wellenamplitude durch den Versuch ermittelt hat, ist man auch in der Lage das logarithmische Dekrement δ auszurechnen.

Zwischen der dimensionslosen Dämpfung D und dem logarithmischen Dekrement δ gibt es die einfache Beziehung (siehe 1.4)

$$\delta = \frac{2 \cdot \pi \cdot D}{\sqrt{1 - D^2}} \quad (2.64)$$

Für kleinere dimensionslose Dämpfungen kann man die Gleichung (2.64) noch vereinfachen

$$\delta \approx 2 \cdot \pi \cdot D, \quad D \approx \frac{\delta}{2 \pi} \quad (2.65)$$

Mit dem ermittelten Dämpfungswert D kann man in das Ersatzsystem gehen.

Während der Vorbereitung dieser Arbeit wurden mit verschiedenen Behältergrößen (Kunststoffbehälter) und für verschiedene Verhältnisse h/a die Dämpfungswerte experimentell ermittelt.

2.7. Experimentelle Ermittlung der Flüssigkeitsdämpfung

Die Erzeugung der Oberflächenwellen erfolgte mit Hilfe einer Kurbelschleife (Bild 2.11).

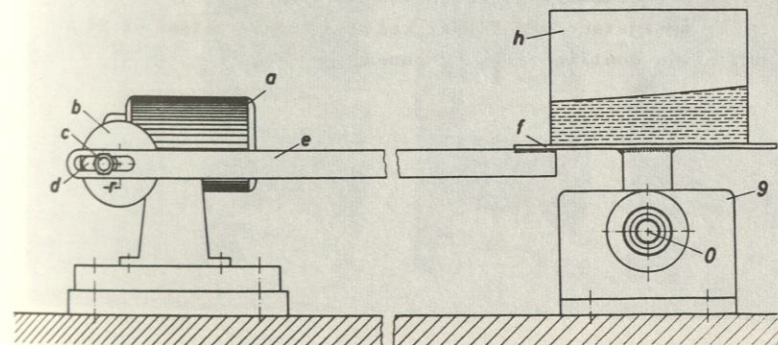


Bild 2.11: Erzeugung der Oberflächenwellen

Ein Gleichstrommotor (a) mit Reduktionsgetriebe (Schneckentrieb) diente als Antriebsmaschine. Auf der Abtriebswelle des Reduktionsgetriebes befand sich eine Scheibe (b), auf der ein Bolzen (c) mit stufenlos einstellbaren Kurbelradien (r) befestigt wurde. Über den Bolzen, der in das Langloch (d) der Kurbelschleife (e) eingreift, wurde die Schwingbewegung erzeugt.

Das andere Ende der Kurbelschleife war mit einer Platte (f) verschweißt und das Ganze war an der Stelle O des Lagerbocks (g) drehbar gelagert.

Beim Antrieb durch die Kurbel machten die Kurbelschleife und der damit verbundene durchsichtige Behälter (h) Schwingbewegungen um die O-Achse des Lagerbocks.

Durch kleine Drehzahländerungen des Gleichstrommotors mit Hilfe eines Leonard-Satzes konnte man beliebige Frequenzen für die Schwingbewegungen des Behälters erzielen.

Nach Einfüllen einer bestimmten Flüssigkeitsmenge (z.B. gefärbtes Wasser) in den Behälter, wurde der Gleichstrommotor in Betrieb gesetzt und durch die Änderung der Drehzahl konnte die Grundeigenfrequenz der Flüssigkeit ermittelt werden. Nachdem die größten Amplituden erreicht waren (Resonanzfall), wurde der Gleichstrommotor abgestellt. Der Ausschwingvorgang der Flüssigkeit wurde mit einer Filmkamera aufgenommen. Bild 2.12 zeigt einen Ausschnitt aus der Filmaufnahme mit 16 Bildern pro Sekunde. Im folgenden Bild (Bild 2.13) ist der Schwingungszustand der Flüssigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt etwas deutlicher zu erkennen.

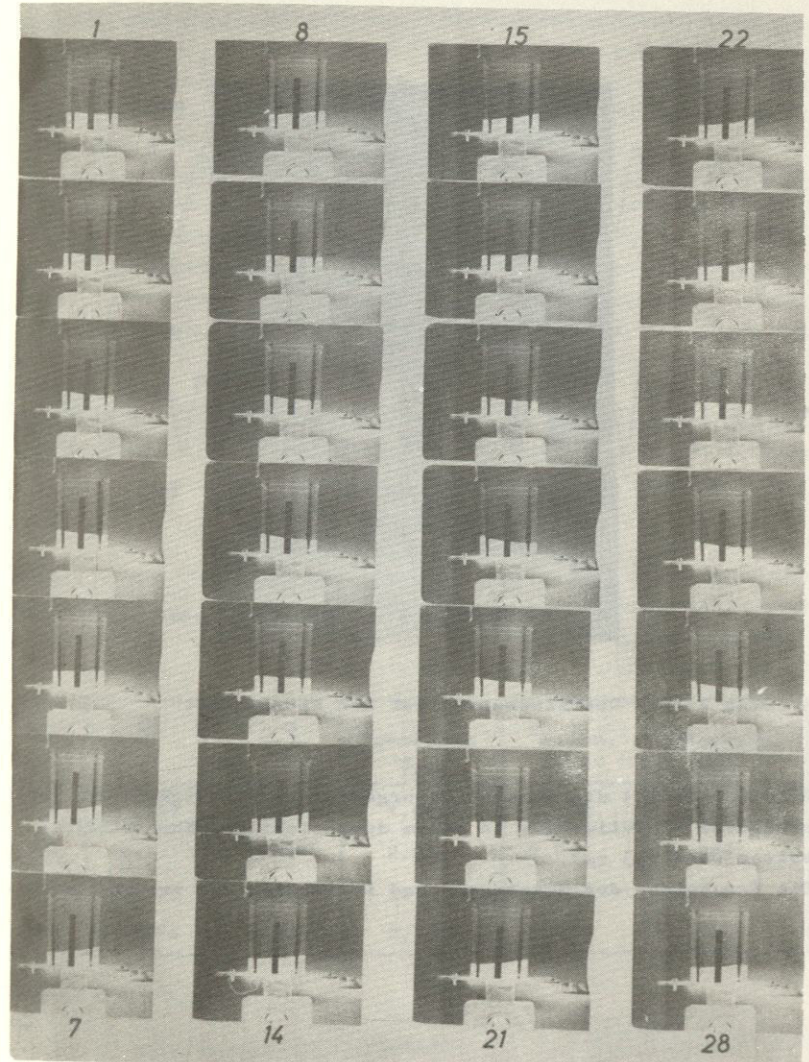
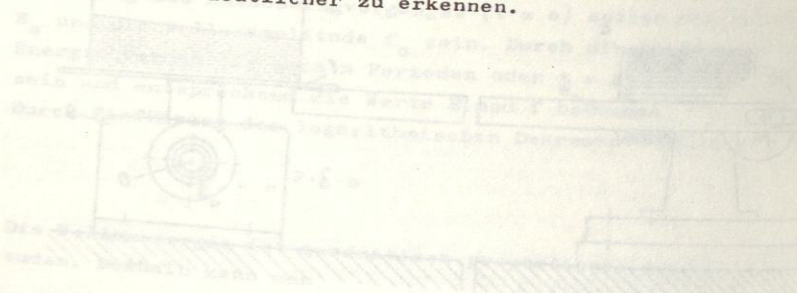


Bild 2.12: Ausschnitt aus den Filmaufnahmen des Ausschwingvorganges der Flüssigkeit

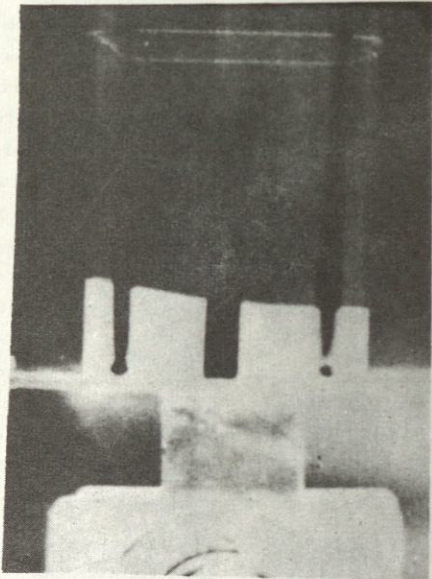


Bild 2.13: Oberflächenverlauf der Flüssigkeit

Bild 2.14 zeigt die Ausschwingvorgänge der Flüssigkeit für verschiedene Einfüllmengen in einem durchsichtigen Kunststoffbehälter ($a = 9,3 \text{ cm}$).

Die Ergebnisse der Messungen sind in Tabelle 2.1 zusammengefaßt.

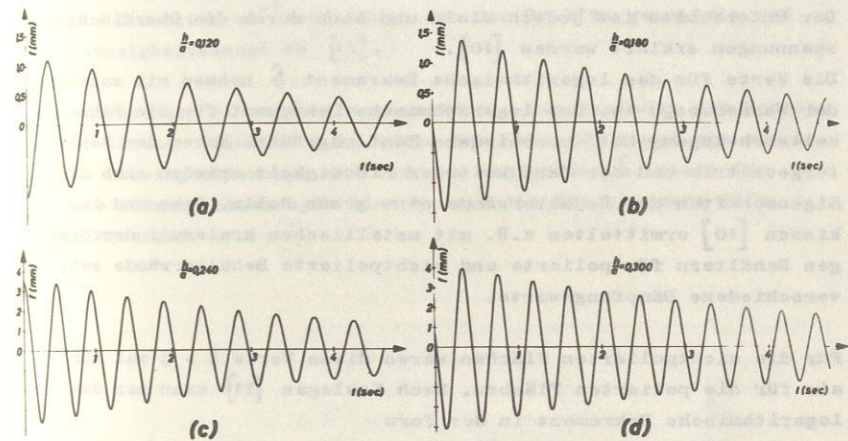


Bild 2.14: Ausschwingvorgänge der Flüssigkeit

h/a	δ	D	f_{gemessen} [Hz]	$f_{\text{rechn.}}$ [Hz]	$\frac{f_{\text{gemessen}}}{f_{\text{rechn.}}}$
0,120	0,157	0,0249	1,600	1,732	0,924
0,180	0,131	0,0208	2,050	2,065	0,992
0,240	0,109	0,0173	2,11	2,304	0,915
0,300	0,086	0,0137	2,35	2,475	0,949

Tabelle 2.1

Die gemessenen Frequenzwerte sind niedriger als die mit Gleichung (2.58) errechneten Werte.

Der Unterschied ist jedoch klein und kann durch die Oberflächenspannungen erklärt werden [10].

Die Werte für das logarithmische Dekrement δ nehmen mit zunehmender Wassermenge ab. Das logarithmische Dekrement für die Flüssigkeitsschwingung hat verschiedene Einflußgrößen. Neben der Behältergeometrie und der Zähigkeit der Flüssigkeit spielen auch die Eigenschaften der Behälterwände eine große Rolle. Case und Parkinson [10] ermittelten z.B. mit metallischen kreiszylinderförmigen Behältern für polierte und nichtpolierte Behälterwände sehr verschiedene Dämpfungswerte.

Für die nichtpolierten Flächen waren diese Werte 2 + 3 mal höher als für die polierten Flächen. Nach Keulegan [11] kann man das logarithmische Dekrement in der Form

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (2.66)$$

ausdrücken. Das erste Glied δ_1 ist der Anteil des logarithmischen Dekrements durch die Energieverluste an den Behälterwänden und am Behälterboden, während das zweite Glied δ_2 die Energieverluste in der Flüssigkeit selbst charakterisiert.

Die Energieverluste an den Behälterwänden und am Behälterboden sind wesentlich größer als die in der Flüssigkeit, deshalb ist für das logarithmische Dekrement das erste Glied δ_1 maßgebend. Es läßt sich in der Form

$$\delta_1 = \zeta \sqrt{\nu \cdot T} \quad (2.67)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot b}} \left[\pi + \pi \frac{b}{a} + \frac{\pi b}{a} \frac{(\pi - 2\pi \frac{b}{a})}{\text{Sinh}(2\pi \frac{b}{a})} \right] \quad (2.67a)$$

darstellen, wobei ν die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit und T die Grundperiode einer freien Schwingung ist. Der Faktor ζ hat die Dimension cm^{-1} und hängt von der Behältergeometrie und der Flüssigkeitsmenge ab [11].

Mit zunehmender Flüssigkeitsmasse werden die Perioden der Schwingungen kleiner (Tabelle 2.1). Auch der Faktor ζ nimmt mit zunehmender Flüssigkeitsmenge ab. Dadurch werden die δ -Werte für größere Flüssigkeitsmengen kleiner als die für kleinere Flüssigkeitsmengen.

3. BIEGESCHWINGUNGEN DES BALKENS

3.1. Biegeschwingungen des ungedämpften Balkens

Die Differentialgleichung für die Biegeschwingungen eines ungedämpften Balkens bei Vernachlässigung der Verdrehung der Querschnittsfläche und der Schubspannungen lautet [13], [14]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E \cdot I(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \rho(x) \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

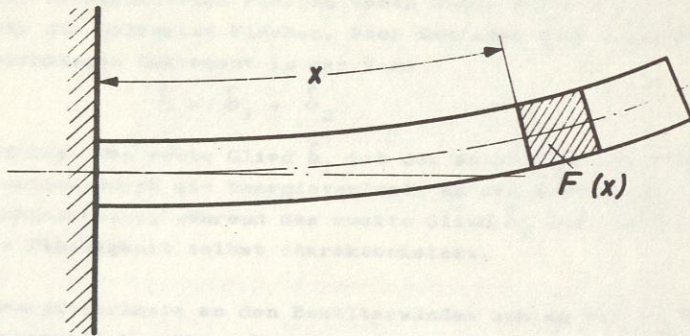


Bild 3.1: Biegeträger mit kontinuierlicher Masse und Elastizität

Es sind:

x die Balkenkoordinate, E der Elastizitätsmodul, ρ die Dichte des Balkenmaterials, $I(x)$ das axiale Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes bezogen auf die neutrale Achse an der Stelle x ,

$F(x)$ die Fläche des Balkenquerschnittes an der Stelle x , y die Durchbiegung des Balkens - eine Funktion von x und t - an der Stelle x (Bild 3.1).

Die Lösung der Schwingungsgleichung für den eingeschwingenen Zustand erfolgt mit dem Ansatz

$$y(t, x) = y(x) \cdot \sin \omega t \quad (3.2)$$

Mit diesem Ansatz erhält man

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{\omega^2 \rho(x) \cdot F(x)}{E \cdot I(x)} \cdot y(x) \quad (3.3)$$

Diese Gleichung und die vorgegebenen Randbedingungen bilden das Eigenwertproblem. Die Lösung des Eigenwertproblems liefert die Eigenfrequenzen ω_n und die Eigenfunktionen $y_n(x)$.

Für den einfachen Fall des Balkens mit konstantem Querschnitt (F_0 , I_0 , ρ_0) kann man das Eigenwertproblem mit dem Ansatz

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) + C_3 \cos\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) \quad (3.4)$$

$$\left(\lambda = l_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{F_0 \cdot \rho_0 \cdot \omega^2}{E \cdot I_0}}, \quad l_0 : \text{die Länge des Balkens} \right)$$

und mit den vorgegebenen Randbedingungen geschlossen lösen. Die allgemeine Lösung für die freien Schwingungen des Balkens mit konstantem Querschnitt wird durch die Überlagerung der Eigenfunktionen in der Form

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (3.5)$$

gebildet [14].

Für die komplizierten Gebilde mit veränderlichem Querschnitt oder mit elastischer Einspannung gibt es verschiedene Näherungsverfahren.

Behandlung von Biegeschwingungsaufgaben mittels Übertragungsmatrizen:

Bild 3.2 zeigt als Beispiel einen an einem Ende eingespannten Balken mit verschiedenen Querschnitten.

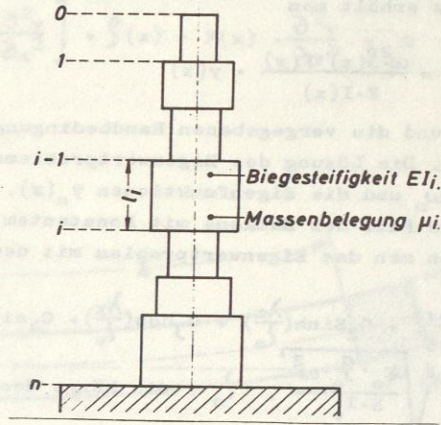


Bild 3.2: Balken mit sprunghaften Querschnittsänderungen

Der Biegezustand der Schnittstelle i des Balkens wird durch vier Zustandsgrößen beschrieben:

Durchbiegung y_i , Neigung φ_i , Biegemoment M_i und Querkraft Q_i .
Diese vier Zustandsgrößen bilden den Zustandsvektor \mathcal{Z}_i [15], [16].

$$\mathcal{Z}_i = \begin{pmatrix} y_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ Q_i \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Wenn man für die Zustandsgrößen die von der Festigkeitslehre bekannten Ableitungen schreibt und die Komponenten des Zustands-

vektors unter Verwendung einer festen Bezugslänge \bar{l} und einer Bezugsbiegesteifigkeit $\overline{E \cdot I}$ in der Form

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= -y_i & \bar{M}_i &= M_i \cdot \bar{l}^2 / \overline{E \cdot I} \\ \bar{\varphi}_i &= -\varphi_i \cdot \bar{l} & \bar{Q}_i &= Q_i \cdot \bar{l}^3 / \overline{E \cdot I} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dimensionslos macht, erhält man einen neuen Zustandsvektor

$$\bar{\mathcal{Z}}_i = \begin{pmatrix} \bar{y}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{Q}_i \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Die Differentialgleichung der Biegeschwingung (3.1) kann man für einen Balkenabschnitt mit konstantem Querschnitt (z.B. zwischen Schnittstelle $i-1$ und i) formelmäßig lösen.

Die allgemeine Lösung der Balkenschwingung für den Balken mit konstantem Querschnitt und mit der Länge l_0 ist mit Gleichung (3.4) gegeben. Diese Gleichung läßt sich mit Hilfe der Rayleigh'schen Funktionen in der Form

$$y(x) = y_0 \cdot c\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) + y_0' \cdot \frac{l_0}{\lambda} \cdot s\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) + y_0'' \cdot \frac{l_0^2}{\lambda^2} \cdot c\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) + y_0''' \cdot \frac{l_0^3}{\lambda^3} \cdot s\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) \quad (3.9)$$

schreiben, wobei die Rayleigh'schen Funktionen wie folgt definiert sind

$$c\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) = \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{\lambda x}{l_0} + \cos \frac{\lambda x}{l_0} \right), \quad s\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) = \frac{1}{2} \left(\sinh \frac{\lambda x}{l_0} + \sin \frac{\lambda x}{l_0} \right) \quad (3.10)$$

$$c\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) = \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{\lambda x}{l_0} - \cos \frac{\lambda x}{l_0} \right), \quad s\left(\frac{\lambda x}{l_0}\right) = \frac{1}{2} \left(\sinh \frac{\lambda x}{l_0} - \sin \frac{\lambda x}{l_0} \right)$$

Man kann die Zustandsvektoren an der Schnittstelle $i-1$ und an der Schnittstelle i des i -ten Feldes durch die Matrixgleichung

$$\bar{\mathcal{Z}}_i = \mathcal{F}_i \cdot \bar{\mathcal{Z}}_{i-1} \quad (3.11)$$

verknüpfen.

F_i heißt die Feldmatrix und hat die Form

$$F_i = \begin{bmatrix} C(\lambda) & \frac{\beta}{\lambda} \cdot S(\lambda) & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \cdot c(\lambda) & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^3 \cdot s(\lambda) \\ \frac{\lambda}{\beta} \cdot s(\lambda) & C(\lambda) & -\frac{1}{\alpha} \frac{\beta}{\lambda} \cdot S(\lambda) & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \cdot c(\lambda) \\ -\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 \cdot c(\lambda) & -\alpha \cdot \frac{\lambda}{\beta} \cdot s(\lambda) & C(\lambda) & \frac{\beta}{\lambda} \cdot S(\lambda) \\ -\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^3 \cdot S(\lambda) & -\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 \cdot c(\lambda) & \frac{\lambda}{\beta} \cdot s(\lambda) & C(\lambda) \end{bmatrix}_i$$

α_i , β_i und ρ_i sind Verhältniszahlen und bilden die Verhältnisse zwischen den Größen des Abschnittes (i) und den gewählten Bezugsgrößen ($\bar{}$) in der Form

$$\alpha_i = \frac{E \cdot I_i}{E \cdot I}, \quad \beta_i = \frac{l_i}{l}, \quad \rho_i = \frac{\mu_i}{\mu} \quad (3.13)$$

Sämtliche Elemente in der Feldmatrix beziehen sich auf das Feld. Z.B. hat das erste Glied der ersten Zeile C die Bedeutung

$$C = C_i = \frac{1}{2} (\text{Cosh } \lambda_i + \cos \lambda_i) \quad (3.14)$$

wobei λ_i in der Form

$$\lambda_i^4 = \frac{\mu_i \cdot \omega^2 \cdot l_i^4}{E \cdot I_i} = \frac{\rho_i \cdot \beta_i^4}{\alpha_i} \cdot \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot l^4}{E \cdot I} = \frac{\rho_i \cdot \beta_i^4}{\alpha_i} \cdot \chi^4 \quad (3.15)$$

dargestellt werden kann.

Wenn man die Matrixgleichung (3.11) zwischen der 0-ten und n-ten Stelle schreibt, bekommt man

$$\bar{z}_n = F_n \cdot F_{n-1} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot \bar{z}_0 \quad (3.16)$$

Durch die Definition der Übertragungsmatrix in der Form

$$A = F_n \cdot F_{n-1} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 \quad (3.17)$$

wird die Gleichung einfacher ausgedrückt

$$\bar{z}_n = A \cdot \bar{z}_0 \quad (3.18)$$

In Bild 3.2 sind je zwei Zustandsgrößen für \bar{z}_0 und \bar{z}_n bekannt

$$\bar{q}_0 = \bar{m}_0 = 0 \\ \bar{y}_n = \bar{\varphi}_n = 0$$

Die Gleichung (3.18) für das in Bild 3.2 ausgeführte Beispiel wird

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{m}_n \\ \bar{q}_n \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

oder nach den entsprechenden Umformungen

$$a_{11} \cdot \bar{y}_0 + a_{12} \cdot \bar{\varphi}_0 = 0 \\ a_{21} \cdot \bar{y}_0 + a_{22} \cdot \bar{\varphi}_0 = 0$$

sein. Dieses homogene Gleichungssystem hat nur dann Lösungen endlicher Größe, wenn die aus den Beiwerten a_{11} , a_{12} , a_{21} und a_{22} gebildete Determinante identisch Null wird. Die Beiwerte a_{ik} sind eine Funktion von $\bar{\lambda}$. Mit dieser Identität

$$\Delta = \Delta(\bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

bekommt man die Frequenzgleichung. Das Auflösen der Gleichung erfolgt mit dem Restwertgrößenverfahren.

Für die näherungsweise Behandlung der Aufgaben ersetzt man jedes Feld durch ein Ersatzgebilde. Dieses Ersatzgebilde besteht aus einem masselosen Stab mit Punktmassen an seinen Enden. Der masselose Stab besitzt die Biegesteifigkeit EI_i und Länge l_i des Feldes. Durch das Halbieren der Masse des Feldes $\mu_i \cdot l_i$ erhält man die beiden Punktmassen m_i (Bild 3.3).

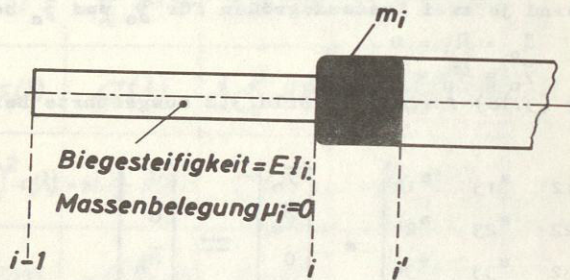


Bild 3.3: Ersatzsystem: Balken mit einzelnen Massen

Dadurch vereinfacht sich die Feldmatrix \mathcal{F}_i des masselosen Stabes und nimmt die Form

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} 1 & \beta_i & -\frac{\beta_i^2}{2\alpha_i} & -\frac{\beta_i^3}{6\alpha_i} \\ 0 & 1 & -\beta_i/\alpha_i & -\frac{\beta_i^2}{2\alpha_i} \\ 0 & 0 & 1 & \beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

an.

Die Punktmassen an den Stabenden verursachen Sprünge im Querkraftverlauf (Bild 3.3).

$$\Delta Q_i = Q'_i - Q_i = -m_i \cdot \omega^2 \cdot y_i \quad (3.21)$$

Die Feldmatrix für die Punktmasse P_i wird durch die Form

$$P_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-m_i \cdot \omega^2}{E \cdot I_i / l_i^3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Die Zustandsvektoren \bar{z}'_i und \bar{z}_{i-1} sind in der Form

$$\bar{z}_i = \mathcal{F}_i \cdot \bar{z}_{i-1}, \quad \bar{z}'_i = P_i \cdot \bar{z}_i, \quad \bar{z}'_i = \mathcal{L}_i \cdot \bar{z}_{i-1} \quad (3.22)$$

verknüpft, wobei $\mathcal{L}_i = P_i \cdot \mathcal{F}_i$ die Leitmatrix nach Falk [16] darstellt.

Die anderen Zwischenbedingungen wie Stützfeder, Drehfeder, Drehmasse oder Feder-Masse-System können in ähnlicher Form berücksichtigt werden.

Ein Katalog von Übertragungsmatrizen wird von Pestel [17] angegeben.

Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen für die Biegeschwingungssysteme teilt man das System zuerst in Felder auf. Eine ausreichende Näherung erfordert natürlich eine ziemlich feine Stabunterteilung.

Danach wählt man die Bezugsgrößen $E \cdot I_i, \bar{l}, \bar{m}$. Wenn es im System Drehmassen, Quer- und Drehfedern oder Feder-Masse-Paarungen gibt, dann muß man auch für diese Größen Bezugsgrößen wählen. Durch die

gewählten Bezugsgrößen sind die Verhältniszahlen für die einzelnen Felder bekannt und die Feldmatrizen für die masselosen Stäbe

können gebildet werden. Die Elemente der Punktmatrizen sind frequenzabhängig. Erst wählt man eine feste Bezugsfrequenz $\bar{\omega}$. Für

die Eigenfrequenzberechnung wird die Übertragungsmatrix für verschiedene Frequenzwerte ermittelt und die Determinante gebildet.

Für eine gewählte Frequenz wird diese Determinante einen bestimmten Wert annehmen (Restwert). Die Aufgabe ist also, den gleichen

Rechnungsgang mit abgeänderter Frequenz zu wiederholen, bis der Restwert Null wird.

Dieses Berechnungsverfahren ist in den meisten Fällen nur mit Hilfe von elektronischen Rechenanlagen möglich.

3.2. Werkstoffdämpfung

Bei der Schwingungsbeanspruchung von Bauteilen wird ein Teil der vom Werkstoff aufgenommenen Formänderungsarbeit für irreversible Deformationen verbraucht und in Wärme umgewandelt. Durch diese Eigenschaft sind die Resonanzamplituden der erzwungenen Schwingungen begrenzt.

Viele Versuche mit verschiedenen Werkstoffen bei verschiedenen Spannungszuständen zeigen, daß bei der Schwingungsbeanspruchung von Bauteilen die Abhängigkeit zwischen der Spannung und Dehnung nicht linear, sondern bei Belastung und Entlastung verschieden ist.

Ein Bauteil soll durch eine Schwingungsbeanspruchung mit der Kreisfrequenz Ω belastet werden. Die Dehnung ϵ eines Volumenelementes dV dieses Bauteiles wird in der Form

$$\epsilon = \epsilon_{\max} \cdot \sin \Omega t \quad (3.23)$$

dargestellt. Bild 3.4 zeigt den Spannungsverlauf, aufgetragen über der Dehnung für dieses Volumenelement.

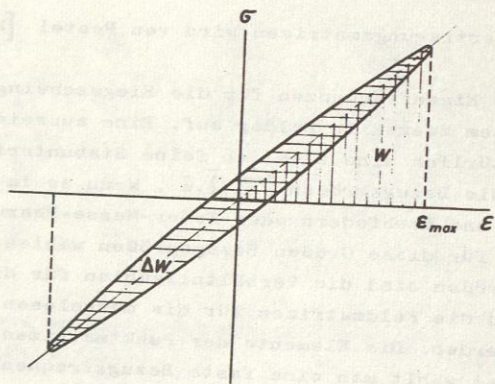


Bild 3.4: Hysteresisschleife

Die in einem bestimmten Maßstab gemessene Fläche der Hysteresisschleife ΔW ergibt die vom Volumenelement während einer Periode verzehrte Energie.

Die Formänderungsarbeit ist

$$W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{\max} \cdot \sigma_{\max} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{\max}^2 \cdot E \cdot dV \quad (3.24)$$

(E-Elastizitätsmodul des Werkstoffes)

Das Verhältnis zwischen ΔW und W wird als verhältnismäßige Elementdämpfung ψ bezeichnet.

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \quad (3.25)$$

Es ist zweckmäßig, für die Schwingungsrechnungen die Hysteresisschleife durch eine Ellipse mit dem gleichen Flächeninhalt zu ersetzen. Bei einer Dehnung nach der Gleichung (3.23) läßt sich die Gleichung der Ellipse in der Form

$$\sigma = E \cdot \left[1 + \frac{\psi}{2\pi\Omega} \cdot \frac{d}{dt} \right] \epsilon \quad (3.26)$$

schreiben [19].

Die Fläche der Hysteresisschleife ist unabhängig von der Frequenz der Beanspruchung. Eine Frequenzabhängigkeit wurde nur für sehr kleine Frequenzen ($f < 0,005$ Hz) festgestellt [18].

Die maximale Dehnung des Materials beeinflußt die Größe der Hysteresisschleife. Die Abhängigkeit zwischen ϵ_{\max} und ΔW ist für die einzelnen Werkstoffe ganz verschieden. Diese Abhängigkeit läßt sich durch eine einfache empirische Beziehung ausdrücken:

$$\Delta W = K \cdot \epsilon_{\max}^n \quad (3.27)$$

K und n sind Zahlenwerte, die durch verschiedene Versuche ermittelt wurden. Diese Werte kann man für verschiedene Metalle und Legierungen in der einschlägigen Literatur finden [20].

Für viele Werkstoffe und auch für Stahl erhält man diese Abhängigkeit in quadratischer oder kubischer Form. Für Stahlbeton kann man die Abhängigkeit quadratisch annehmen [18].

Die rechnerische Ermittlung der verhältnismäßigen Dämpfung Ψ für ein Bauwerk ist wegen der komplizierten Geometrie und der verschiedenen Baumaterialien sehr kompliziert.

Mit der Annahme $\Psi = \text{const.}$ wird die für die Baustoffe wie Stahlbeton geltende quadratische Abhängigkeit zwischen ϵ_{max} und ΔW zum Ausdruck gebracht. Diese Annahme vereinfacht auch die Lösung der Schwingungsprobleme durch die Einführung eines komplexen E-Moduls.

In dieser Arbeit wird die verhältnismäßige Elementdämpfung Ψ als konstant angenommen. Die Ermittlung von Ψ erfolgt durch Ausschwingversuche des Bauteils. Das logarithmische Dekrement δ der abklingenden Schwingung wird ermittelt. Für die verhältnismäßige Elementdämpfung Ψ gilt die Beziehung [21]

$$\Psi \approx 2 \cdot \delta \tag{3.28}$$

Wenn man die Gleichung (3.23) in komplexer Form ausdrückt und in die Gleichung (3.26) einsetzt, erhält man

$$\zeta = E \cdot \left[1 + \frac{\Psi}{2\pi\Omega} \cdot \frac{d}{dt} \right] \epsilon_{\text{max}} \cdot e^{i\Omega t} \tag{3.29}$$

$$\zeta = E \cdot \left[1 + \frac{\Psi}{2\pi} \cdot i \right] \epsilon \tag{3.29a}$$

Durch die Definition eines komplexen E-Moduls

$$E_k = E \cdot \left[1 + \frac{\Psi}{2\pi} \cdot i \right] \tag{3.30}$$

kann man die Spannungen eines werkstoffgedämpften Systems in der Form

$$\zeta = E_k \cdot \epsilon \tag{3.31}$$

ausdrücken. Die Gleichungen für die ungedämpften Balkenschwingungen sind auch für die werkstoffgedämpften Schwingungen gültig, wenn man E durch E_k ersetzt.

Die Behandlung der Schwingungsaufgaben mit dem komplexen E-Modul wird in Kapitel 4 ausführlich erläutert.

Die Berechnung der erzwungenen Schwingungen des werkstoffgedämpften Balkens mit Hilfe von Eigenfunktionen:

Bei der Einwirkung einer harmonischen Kraft $\tilde{P} = P_o \cdot e^{i\Omega t}$ an der Stelle $x = a$ des Balkens wird der Schwingungsausschlag in der Form

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(a) \cdot y_n(x) \cdot P_o \cdot e^{i(\Omega t - \epsilon_n)}}{m_n \cdot \omega_n^2 \cdot \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \frac{\Psi^2}{4\pi^2}} \tag{3.32}$$

geschrieben, wobei $\epsilon_n = \arctg \frac{\frac{\Psi}{2\pi}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$ (3.33)

und $m_n = \int_0^{l_0} \mu \cdot y_n \cdot dx$ (3.34)

sind [14].

Die größte Schwingweite für die n-te Schwingung (Resonanzamplitude für die n-te Schwingung) wird:

$$y_{n \text{ max}} = \frac{y_n(x) \cdot y_n(a) \cdot P_o}{m_n \cdot \omega_n^2 \cdot \frac{\Psi}{2\pi}} \tag{3.35}$$

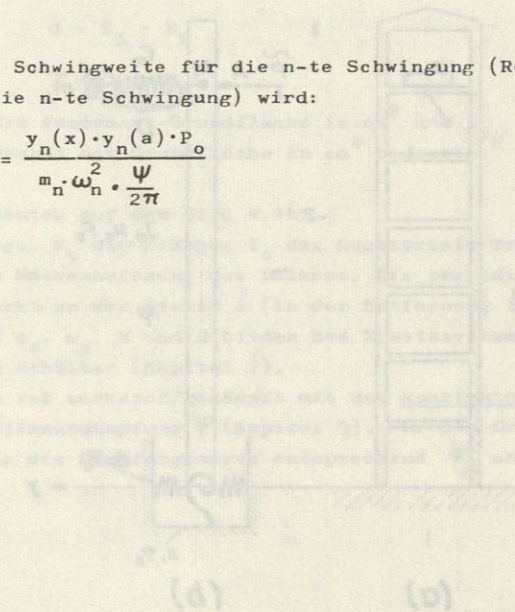


Bild 1.1: Gliederung des Balkens

4. THEORIE DES DYNAMISCHEN SCHWINGUNGSDÄMPFERS FÜR BIEGESCHWINGUNGEN

4.1. Aufgabenstellung

Bild 4.1a zeigt einen Glockenturm mit der Glocke und mit dem Flüssigkeitsbehälter. Bild 4.1b zeigt den Turm in idealisierter Form (Balken mit konstantem Querschnitt). Der Flüssigkeitsbehälter wird durch das Ersatzsystem (Kapitel 2) ersetzt.

Die Glockentürme sind in Wirklichkeit nicht fest eingespannt, sondern elastisch gebettet. Diese elastischen Bettungseigenschaften sind im Bild 4.1b durch die Drehfedersteifigkeit χ (in kp.cm) und die Querfedersteifigkeit d (in kp/cm) ersetzt.

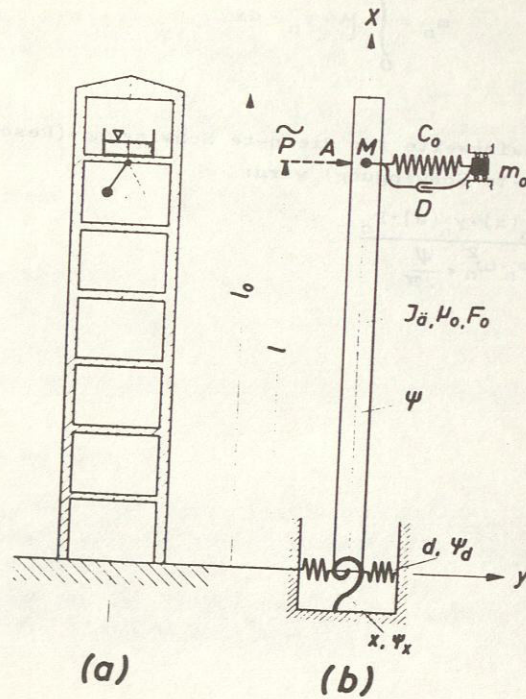


Bild 4.1: Glockenturm und dessen Ersatzsystem

In der Fachliteratur werden die Federungseigenschaften des Fundaments mit der Bettungsziffer C_B (in kp/cm^3) und mit der Schubziffer S_B (in kp/cm^3) des Bodens charakterisiert [5], [22].

Die Bettungsziffer

$$C_B = \frac{G}{\delta_v} \quad (4.1)$$

bedeutet diejenige Bodenpressung G in der Grundfläche (in kp/cm^2) die eine vertikale Verschiebung des Fundaments um $\delta_v = 1 \text{ cm}$ verursacht.

Die Schubziffer

$$S_B = \frac{\tau}{\delta_h} \quad (4.2)$$

bedeutet diejenige Schubspannung τ (in kp/cm^2) in der Grundfläche die eine horizontale Verschiebung des Fundaments um $\delta_h = 1 \text{ cm}$ verursacht.

Die Zusammenhänge zwischen den Federsteifigkeiten und Bettungsziffern sind wie folgt definiert:

$$d = S_B \cdot F_F \quad (4.3)$$

$$\chi = C_B \cdot I_{\ddot{a}F} \quad (4.4)$$

wobei F_F die Fundament-Grundfläche in cm^2 und $I_{\ddot{a}F}$ das äquatoriale Trägheitsmoment der Grundfläche in cm^4 bedeuten.

Weiter bedeuten auf dem Bild 4.1b:

l_0 die Länge, F_0 die Fläche, I_0 das äquatoriale Trägheitsmoment und μ_0 die Massenbelegung des Balkens. Die periodische Glockenkraft \tilde{P} wirkt an der Stelle A (in der Entfernung l vom Fundament). Die Größen c_0 , m_0 , M und D bilden das Ersatzsystem für die Flüssigkeit im Behälter (Kapitel 2).

Der Balken sei werkstoffgedämpft mit der konstanten verhältnismäßigen Elementdämpfung Ψ (Kapitel 3). Für die Dreh- und Querfeder seien die Dämpfungswerte entsprechend ψ_χ und ψ_d .

4.2. Die freien Schwingungen

Ermittlung der Frequenzgleichung:

Die Dämpfungswerte des Balkens und der Flüssigkeit sind klein. Durch die Vernachlässigung der Dämpfungswerte werden die Frequenzwerte sich sehr wenig ändern. Aus den Randbedingungen des Systems ergibt sich die Frequenzgleichung des Systems. Diese lauten:

- 1) Querkraftbedingung für das Fundament ($x = 0$)

$$E \cdot I_0 \cdot y'''(0) + d \cdot y(0) = 0 \quad (4.5)$$

- 2) Momentbedingung für das Fundament ($x = 0$)

$$E \cdot I_0 \cdot y''(0) - \chi \cdot y'(0) = 0 \quad (4.6)$$

- 3) Momentbedingung für das freie Balkenende ($x = l_0$)

$$y''(l_0) = 0 \quad (4.7)$$

- 4) Die Querkraftbedingung an der Stelle A (Bild 4.2).

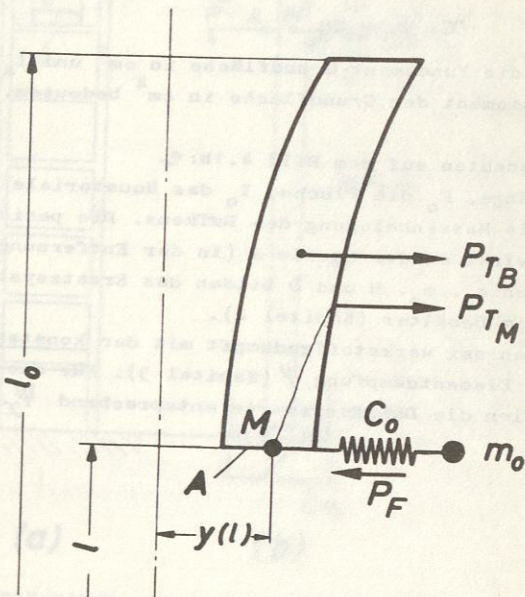


Bild 4.2: Zur Definition der Querkräfte (ungedämpftes System)

Wenn der Balken mit der Eigenfrequenz ω schwingt, dann wird das damit verbundene Feder-Masse-System an seinem Fußpunkt erregt. Durch diese Erregung schwingt die Masse m_0 und die Feder c_0 dehnt sich. Die Querkraft an der Stelle A ist die Summe der Federkraft, der Trägheitskraft der feststehenden Masse M und der Trägheitskraft des Balkenteiles zwischen $x = l$ und $x = l_0$. Die Amplitude der Federkraft ist

$$|P_F| = x_{rel} \cdot c_0 \quad (4.8)$$

mit

$$x_{rel} = y(l) \cdot \frac{\frac{\omega^2}{c_0/m_0}}{1 - \frac{\omega^2}{c_0/m_0}} \quad (4.8a)$$

Die Amplitude der Trägheitskraft der festen Masse ist

$$P_{T_M} = y(l) \cdot \omega^2 \cdot M \quad (4.9)$$

Die Amplitude der Trägheitskraft des Balkenteiles ist

$$P_{T_B} = \omega^2 \int_{x=l}^{x=l_0} \mu \cdot y(x) = \omega^2 \mu \frac{l_0}{\lambda} \left[C_1 \sinh \frac{\lambda x}{l_0} + C_2 \cosh \frac{\lambda x}{l_0} + C_3 \sin \frac{\lambda x}{l_0} - C_4 \cos \frac{\lambda x}{l_0} \right] \Bigg|_l^{l_0} \quad (4.10)$$

Die Querkraftbedingung an der Stelle A wird damit

$$Q(l) = -EI_0 y'''(l) = +\omega^2 \cdot m_0 \cdot y(l) \left[\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{c_0/m_0}} \right] + y(l) \omega^2 \cdot M + \omega^2 \mu \frac{l_0}{\lambda} \cdot \left[(C_1 \sinh \lambda + C_2 \cosh \lambda + C_3 \sin \lambda - C_4 \cos \lambda) - (C_1 \sinh \lambda \frac{l}{l_0} + C_2 \cosh \lambda \frac{l}{l_0} + C_3 \sin \lambda \frac{l}{l_0} - C_4 \cos \lambda \frac{l}{l_0}) \right] \quad (4.11)$$

Mit den Ableitungen der allgemeinen Lösung (Gleichung (3.4))

$$y'(x) = \frac{\lambda}{l_0} (C_1 \sinh \frac{\lambda x}{l_0} + C_2 \cosh \frac{\lambda x}{l_0} - C_3 \sin \frac{\lambda x}{l_0} + C_4 \cos \frac{\lambda x}{l_0}) \quad (4.12)$$

$$y''(x) = \frac{\lambda^2}{l_0^2} (C_1 \cosh \frac{\lambda x}{l_0} + C_2 \sinh \frac{\lambda x}{l_0} - C_3 \cos \frac{\lambda x}{l_0} - C_4 \sin \frac{\lambda x}{l_0}) \quad (4.12a)$$

$$y'''(x) = \frac{\lambda^3}{l_0^3} (C_1 \sinh \frac{\lambda x}{l_0} + C_2 \cosh \frac{\lambda x}{l_0} + C_3 \sin \frac{\lambda x}{l_0} - C_4 \cos \frac{\lambda x}{l_0}) \quad (4.12b)$$

und mit den dimensionslos gemachten Quer- und Drehfedersteifigkeiten des Fundaments

$$\frac{d \cdot l_0^3}{EI_0} = \frac{1}{R_d}, \quad \frac{x \cdot l_0}{EI_0} = \frac{1}{R_x} \quad (4.13)$$

lassen sich die ersten drei Randbedingungen in der Form

$$1) \lambda^3 \cdot (C_2 - C_4) + \frac{1}{R_d} \cdot (C_1 + C_3) = 0 \quad (4.14)$$

$$2) \lambda^2 \cdot (C_1 - C_3) - \frac{1}{R_x} \cdot \lambda (C_2 + C_4) = 0 \quad (4.15)$$

$$3) C_1 \cdot \cosh \lambda + C_2 \cdot \sinh \lambda - C_3 \cdot \cos \lambda - C_4 \cdot \sin \lambda = 0 \quad (4.16)$$

schreiben.

Die Bedingung für die Querkraft (4.11) kann man mit folgenden dimensionslosen Größen einfacher ausdrücken:

- Das Verhältnis zwischen der schwingenden Masse des Ersatzsystems zu der Gesamtmasse des Balkens

$$v_0 = \frac{m_0}{\mu_0 \cdot l_0} \quad (4.17)$$

- Das Verhältnis zwischen der feststehenden Masse des Ersatzsystems zu der Gesamtmasse des Balkens

$$v_M = \frac{M}{\mu_0 \cdot l_0} \quad (4.18)$$

- Dimensionsloser Frequenzkennwert für die Feder-Masse-Paarung des Ersatzsystems

$$\lambda_a = l_0^4 \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \omega_a^2}{E \cdot I_0}} = l_0^4 \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \frac{c_0}{m_0}}{E \cdot I_0}} \quad (4.19)$$

Zwischen den Frequenzen ω und ω_a gibt es die einfache Beziehung

$$\frac{\omega}{\omega_a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_a} \right)^2 \quad (4.20)$$

Durch diese dimensionslosen Größen kann die Querkraftbedingung an der Stelle A wie folgt geschrieben werden:

$$\lambda^4 \left[v_0 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a} \right)^4} + v_M \right] \cdot (C_1 \cosh \frac{\lambda l}{l_0} + C_2 \sinh \frac{\lambda l}{l_0} + C_3 \cos \frac{\lambda l}{l_0} + C_4 \sin \frac{\lambda l}{l_0}) + \lambda^3 (C_1 \sinh \lambda + C_2 \cosh \lambda + C_3 \sin \lambda - C_4 \cos \lambda) = 0 \quad (4.21)$$

Die Gleichungen (4.14), (4.15), (4.16) und (4.21) bilden ein homogenes Gleichungssystem. Das System hat nur dann Lösungen endlicher Größe (Eigenwerte), wenn die aus den Beiwerten von C_1, C_2, C_3 und C_4 gebildete Determinante identisch Null wird.

Die Determinantenbeziehung ist:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_d} & \lambda^3 & \frac{1}{R_d} & -\lambda^3 \\ \lambda^2 & -\frac{1}{R_x} \cdot \lambda & -\lambda^2 & -\frac{1}{R_x} \cdot \lambda \\ \cosh \lambda & \sinh \lambda & -\cos \lambda & -\sin \lambda \\ \left\{ v_M + v_0 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a} \right)^4} \right] \right\} & \left\{ v_M + v_0 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a} \right)^4} \right] \right\} & \left\{ v_M + v_0 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a} \right)^4} \right] \right\} & \left\{ v_M + v_0 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a} \right)^4} \right] \right\} \\ \cdot \lambda^4 \cdot \cosh \frac{\lambda l}{l_0} + \lambda^3 \sinh \lambda & \cdot \lambda^4 \cdot \sinh \frac{\lambda l}{l_0} + \lambda^3 \cosh \lambda & \lambda^4 \cdot \cos \frac{\lambda l}{l_0} + \lambda^3 \sin \lambda & \lambda^4 \cdot \sin \frac{\lambda l}{l_0} - \lambda^3 \cos \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Das Auflösen dieser Determinante liefert die Gleichung

$$2R_d \cdot R_x \cdot \lambda^2 Q(\lambda) + 2R_d \cdot \lambda^6 A(\lambda) + 2R_x \cdot \lambda^4 B(\lambda) - 2\lambda^3 E(\lambda) = \lambda^4 \left\{ v_M + \frac{v_0}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^4} \right\}$$

$$\left[G(\lambda) \cdot H(\bar{\lambda}) - F(\lambda) \cdot J(\bar{\lambda}) + R_d \cdot R_x \cdot \lambda^4 \left\{ J(\lambda) \cdot F(\bar{\lambda}) - H(\lambda) \cdot G(\bar{\lambda}) \right\} - \right.$$

$$\left. - 2R_d \cdot \lambda^3 (\cosh \lambda \cdot \cos \bar{\lambda} + \cosh \bar{\lambda} \cdot \cos \lambda) - 2R_x \cdot \lambda (\sinh \lambda \cdot \sin \bar{\lambda} + \sinh \bar{\lambda} \cdot \sin \lambda) \right] \quad (4.22)$$

wobei die Funktionen $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $E(\lambda)$, $F(\lambda)$, $G(\lambda)$,

$H(\lambda)$, $J(\lambda)$ wie folgt definiert sind:

$$A(\lambda) = \cosh \lambda \cdot \sin \lambda + \sinh \lambda \cdot \cos \lambda$$

$$B(\lambda) = \cosh \lambda \cdot \sin \lambda - \sinh \lambda \cdot \cos \lambda$$

$$Q(\lambda) = \cosh \lambda \cdot \cos \lambda - 1$$

$$E(\lambda) = 1 + \cosh \lambda \cdot \cos \lambda$$

$$F(\lambda) = \sinh \lambda + \sin \lambda = 2 s(\lambda)$$

$$G(\lambda) = \cosh \lambda + \cos \lambda = 2 c(\lambda)$$

$$H(\lambda) = \sinh \lambda - \sin \lambda = 2 s(\lambda)$$

$$J(\lambda) = \cosh \lambda - \cos \lambda = 2 c(\lambda)$$

dabei ist $\bar{\lambda} = \lambda \cdot \frac{l}{l_0}$ der Frequenzkennwert.

Die Lösung der Gleichung (4.22) kann mit Hilfe des Restwertverfahrens durchgeführt werden.

4.3. Die erzwungenen Schwingungen

Bei der Berechnung der erzwungenen Schwingungen müssen die Dämpfungswerte des Balkens und des Ersatzsystems berücksichtigt werden. Durch die Definition eines komplexen E-Moduls ist man in der Lage, für die werkstoffgedämpften Balkenschwingungen die Gleichungen des dämpfungslosen Falles zu verwenden.

Für die Berücksichtigung der Werkstoffdämpfung an der elastischen Einspannstelle des Balkens muß eine entsprechende komplexe Umformung für die Federsteifigkeiten d und x in der Form

$$d_k = d \left[1 + \frac{\psi_d}{2\pi} i \right], \quad x_k = x \cdot \left[1 + \frac{\psi_x}{2\pi} i \right] \quad (4.23)$$

vorgenommen werden. Die dimensionslosen Federsteifigkeiten R_d und R_x werden durch die neuen komplexen Größen R_{d_k} und R_{x_k} in der Form

$$R_{d_k} = R_d \cdot \frac{1 + \frac{\psi}{2\pi} i}{1 + \frac{\psi_d}{2\pi} i}, \quad R_{x_k} = R_x \cdot \frac{1 + \frac{\psi}{2\pi} i}{1 + \frac{\psi_x}{2\pi} i} \quad (4.24)$$

ersetzt [19].

Der dimensionslose Frequenzkennwert λ (Gleichung 3.4a) ist auch zu ersetzen durch

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{1 + \frac{\psi}{2\pi} i}} \quad (4.25)$$

Die durch die Erregerkraft $\bar{P} = P_0 \cdot e^{i\Omega t}$ (mit reellem Frequenzwert Ω) erzwungenen Schwingungen des im Bild 4.1b gezeigten Balkens führen auf ein komplexes Randwertproblem. Die Eigenwerte λ_{ei} und die Eigenfrequenzen ω_{ei} des Balkens sind komplex. Da die komplexen Eigenfrequenzen ω_{ei} des Balkens immer von den reellen Erregerfrequenzen Ω verschieden sind, kann man das Randwertproblem für alle Erregerfrequenzen lösen [23].

Die transversale Schwingung $y(x, t)$ des Balkens an der Stelle x hat die Form

$$y(x, t) = y(x) \cdot e^{i\Omega t} \quad (4.26)$$

und liefert auch an den Resonanzstellen endliche Werte.

Die von der Zeit unabhängige Amplitudenfunktion $y(x)$ wird durch ein Wertpaar (Betrag und Argument) bestimmt und stellt die Schwinweite und Phase über der Balkenlänge dar.

Ermittlung der Schwingungsamplitude des Balkens an der Stelle A:

Die Amplitudenfunktion $y(l)$ hat an der Stelle A des Balkens die allgemeine Form

$$y(l) = C_1 \cosh \bar{\lambda}_k + C_2 \sinh \bar{\lambda}_k + C_3 \cos \bar{\lambda}_k + C_4 \sin \bar{\lambda}_k \cdot (\bar{\lambda}_k = \lambda_k \frac{l}{l_0}) \quad (4.27)$$

Die Elimination der Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4 erfolgt durch die drei Randbedingungen des Balkens und durch die Querkraftbedingung an der Stelle A.

Die Randbedingungen mit Berücksichtigung der komplexen Größen (Analog zu den Gleichungen 4.14, 4.15 und 4.16) lauten

$$1) \lambda_k^3 \cdot (C_2 - C_4) + \frac{1}{R_{dk}} (C_1 + C_3) = 0 \quad (4.28)$$

$$2) \lambda_k^2 \cdot (C_1 - C_3) - \frac{1}{R_{dk}} \cdot \lambda_k \cdot (C_2 + C_4) = 0 \quad (4.29)$$

$$3) C_1 \cosh \lambda_k + C_2 \sinh \lambda_k - C_3 \cos \lambda_k - C_4 \sin \lambda_k = 0 \quad (4.30)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert

$$C_2 = -N(\lambda_k) \cdot C_1 \quad (4.31)$$

$$C_3 = \frac{1}{(R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 + 1)} \cdot \left[(R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 - 1) + 2R_{dk} \cdot \lambda_k^3 \cdot N(\lambda_k) \right] \cdot C_1 \quad (4.32)$$

$$C_4 = \frac{1}{(R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 + 1)} \cdot \left[2R_{zk} \cdot \lambda_k - (R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 - 1) \cdot N(\lambda_k) \right] \cdot C_1 \quad (4.33)$$

mit

$$N(\lambda_k) = \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k \cdot \left(\frac{R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 - 1}{R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 + 1} \right) - \sin \lambda_k \cdot \left(\frac{2R_{zk} \cdot \lambda_k}{R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 + 1} \right)}{\sinh \lambda_k + \cos \lambda_k \cdot \left(\frac{2R_{dk} \cdot \lambda_k^3}{R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 + 1} \right) - \sin \lambda_k \cdot \left(\frac{R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 - 1}{R_{dk} \cdot R_{zk} \cdot \lambda_k^4 + 1} \right)} \quad (4.34)$$

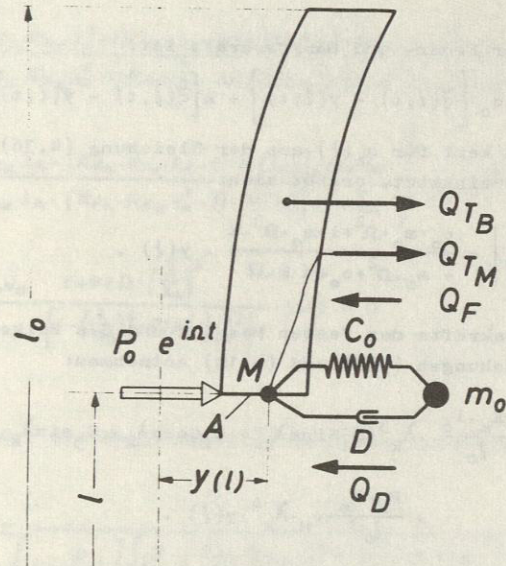


Bild 4.3: Zur Definition der Querkräfte (gedämpftes System)

Die Querkraft an der Stelle A (Bild 4.3) ist die Summe von Federkraft, Dämpferkraft, Trägheitskraft der festen Masse und Trägheitskraft des Balkenteiles.

Zur Bestimmung der Feder- und Dämpferkraft (Q_F, Q_D) bezeichnet man die transversale Verschiebung des Balkens an der Stelle $x = l$ mit $y(l, t) = y(l) \cdot e^{i\Omega t}$ und die Auslenkung der schwingenden Masse m_0 aus dem Ruhezustand mit $\tilde{q}(l, t) = q_0(l) \cdot e^{i\Omega t}$. Damit wird die Bewegungsgleichung für die schwingende Masse m_0

$$m_0 \cdot \ddot{\tilde{q}} + c_0 \cdot [\dot{\tilde{q}} - \dot{y}(l, t)] + k [\tilde{q} - y(l, t)] = 0 \quad (4.35)$$

Mit den entsprechenden Ableitungen von $y(l, t)$ und $\tilde{q}(l, t)$ bekommt man

$$q_0(l) = y(l) \cdot \frac{c_0 + i \cdot k \cdot \Omega}{[-m_0 \cdot \Omega^2 + c_0 + i \cdot k \cdot \Omega]} \quad (4.36)$$

Die Summe der Feder- und Dämpferkraft ist:

$$Q_F + Q_D = c_0 \left[\ddot{q}(l, t) - y(l, t) \right] + k \left[\dot{q}(l, t) - \dot{y}(l, t) \right] \quad (4.37)$$

Wenn man den Wert für $q_0(l)$ aus der Gleichung (4.36) in die Gleichung (4.37) einsetzt, ergibt sich:

$$\left| Q_F + Q_D \right| = \frac{c_0 \cdot m_0 \cdot \Omega^2 + i \cdot m_0 \cdot \Omega^3 \cdot k}{-m_0 \cdot \Omega^2 + c_0 + i k \cdot \Omega} \cdot y(l) \quad (4.38)$$

Die Trägheitskräfte der festen Masse M und des Balkenteiles kann man den Gleichungen (4.9) und (4.10) entnehmen:

$$Q_{T_M} + Q_{T_B} = \frac{E_k \cdot I_0}{l_0^3} \cdot \lambda_k^3 (C_1 \sinh \lambda_k + C_2 \cosh \lambda_k + C_3 \sin \lambda_k - C_4 \cos \lambda_k) + \frac{E_k \cdot I_0}{l_0^3} \cdot v_M \cdot \lambda_k^4 \cdot y(l) \quad (4.39)$$

Mit den Abkürzungen für das Ersatzsystem

$$D = \frac{k}{2 \cdot m_0 \cdot \omega_a} \quad , \quad \lambda_a^4 = l_0^4 \cdot \frac{m_0 \cdot \omega_a^2}{EI_0} \quad (4.40)$$

und mit dem dimensionslosen Frequenzkennwert λ des dämpfungsfreien Balkens wird die Querkraftbedingung an der Stelle A:

$$P_0 + \frac{E_k \cdot I_0}{l_0^3} \lambda_k^3 (C_1 \sinh \lambda_k + C_2 \cosh \lambda_k + C_3 \sin \lambda_k - C_4 \cos \lambda_k) + \frac{E_k \cdot I_0}{l_0^3} \cdot v_M \cdot \lambda_k^4 \cdot y(l) + \frac{EI_0}{l_0^3} \lambda^4 \cdot v_0 \cdot \frac{[1 + 2iD(\frac{\lambda}{\lambda_a})^2]}{[1 - (\frac{\lambda}{\lambda_a})^4 + 2iD(\frac{\lambda}{\lambda_a})^2]} \cdot y(l) = 0 \quad (4.41)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.31), (4.32) und (4.33) in die Gleichung (4.41) erhält man:

$$P_0 + \frac{E_k \cdot I_0}{l_0^3} \lambda_k^3 \left\{ \frac{(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 + 1) (\sinh \lambda_k - N(\lambda_k) \cdot \cosh \lambda_k) + [(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 - 1) + 2 R_{d_k} \cdot \lambda_k^3 \cdot N(\lambda_k)] \cdot (\cosh \bar{\lambda}_k - N(\lambda_k) \cdot \sinh \bar{\lambda}_k)}{(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 + 1) (\cosh \bar{\lambda}_k - N(\lambda_k) \cdot \sinh \bar{\lambda}_k) + [(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 - 1) + 2 R_{d_k} \cdot \lambda_k^3 \cdot N(\lambda_k)] \cdot (\sinh \lambda_k - N(\lambda_k) \cdot \cosh \lambda_k)} \right\} \cdot y(l) + \frac{E_k \cdot I_0 \cdot v_M \cdot \lambda_k^4}{l_0^3} \cdot y(l) + \frac{E \cdot I_0 \cdot \lambda^4 \cdot v_0}{l_0^3} \cdot \frac{1 + 2iD \cdot (\frac{\lambda}{\lambda_a})^2}{[1 - (\frac{\lambda}{\lambda_a})^4 + 2iD(\frac{\lambda}{\lambda_a})^2]} \cdot y(l) = 0 \quad (4.42)$$

Damit läßt sich die Amplitude $y(l)$ in dimensionsloser Form schreiben:

$$\frac{y(l)}{P_0 \cdot l_0^3} = \bar{y}(l) = \frac{-1}{E \cdot I_0 \left[1 + \frac{\psi}{2\pi} i \right] \left\{ \lambda_k^3 \frac{(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 + 1) \cdot (\sinh \lambda_k - N(\lambda_k) \cdot \cosh \lambda_k) + [(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 - 1) + 2 R_{d_k} \cdot \lambda_k^3 \cdot N(\lambda_k)] \cdot (\cosh \bar{\lambda}_k - N(\lambda_k) \cdot \sinh \bar{\lambda}_k)}{(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 + 1) \cdot (\cosh \bar{\lambda}_k - N(\lambda_k) \cdot \sinh \bar{\lambda}_k) + [(R_{d_k} \cdot R_{x_k} \cdot \lambda_k^4 - 1) + 2 R_{d_k} \cdot \lambda_k^3 \cdot N(\lambda_k)] \cdot (\sinh \lambda_k - N(\lambda_k) \cdot \cosh \lambda_k)} \right\} + v_M \cdot \lambda_k^4 \left\{ + \lambda^4 \cdot v_0 \cdot \frac{[1 + 2iD(\frac{\lambda}{\lambda_a})^2]}{[1 - (\frac{\lambda}{\lambda_a})^4 + 2iD(\frac{\lambda}{\lambda_a})^2]} \right\}} \quad (4.43)$$

Zur Auswertung dieser Gleichung müssen die komplexen Ausdrücke für R_{d_k} , R_{x_k} und N aus den Gleichungen (4.24) und (4.34) in obige Gleichung eingesetzt werden. Das Berechnen der Schwingungsamplituden $y(l)$ für die Resonanzkurven erfolgt nach dem folgenden Schema:

1. Ermittlung der reellen Bestimmungsgrößen des Balkens und der elastischen Einspannung.
2. Ermittlung der Bestimmungsgrößen für das Ersatzsystem.
3. Umformung der reellen Systemgrößen in komplexe Größen mit Hilfe der Dämpfungswerte.
4. Berechnung des dimensionslosen Frequenzkennwertes λ (reell) für eine bestimmte Frequenz.
5. Berechnung des komplexen Frequenzkennwertes λ_k für einen reellen Frequenzkennwert λ und Einsetzung von λ_k mit anderen komplexen Systemgrößen in die Gleichung.

Die Berechnung der Gleichung (4.43) für einen Frequenzwert mit Hilfe einer Tischrechenmaschine ist wegen der komplexen Rechenweise äußerst mühsam. Die Werte für die Resonanzkurven in dieser Arbeit wurden auf der elektronischen Rechenanlage CDC 6400 des Rechenzentrums der Technischen Hochschule Aachen gerechnet. Die Benutzung der Programmiersprache FORTRAN IV [24] gestattet es, komplexe Größen wie reelle Größen zu behandeln.

Ein Berechnungsbeispiel

Es sei ein Balken mit konstantem Querschnitt betrachtet. Der Balken ist an einem Ende elastisch eingespannt und hat an seinem freien Ende eine feste Masse. An dieser Stelle wird der Balken durch eine harmonische Kraft erregt. Die weiteren Daten sind:

Elastische Einspannung: $R_d = R_x = 0,001$
 Verhältniswert für die feste Masse: $v_M = 0,01$
 Materialdämpfungswerte: $\psi = \psi_d = \psi_x = 0,02$

Bild 4.4 zeigt die numerische Auswertung der Gleichung (4.43) mit den obigen Daten im Frequenzbereich $1,820 < \lambda < 1,880$ in der komplexen Zahlenebene. Die Resonanzstelle in diesem Bereich ist $\lambda = 1,8515$ und die Resonanzamplitude beträgt $\bar{y}(\lambda_0) = 102,4$. Der Phasenwinkel ϵ zwischen Erregerkraft P und Schwingungsamplitude $\bar{y}(\lambda_0)$ ist ungefähr 88° , d.h. die Werkstoffdämpfung macht sich kaum bemerkbar, da der Phasenwinkel nur um 2° vom ungedämpften Fall abweicht.

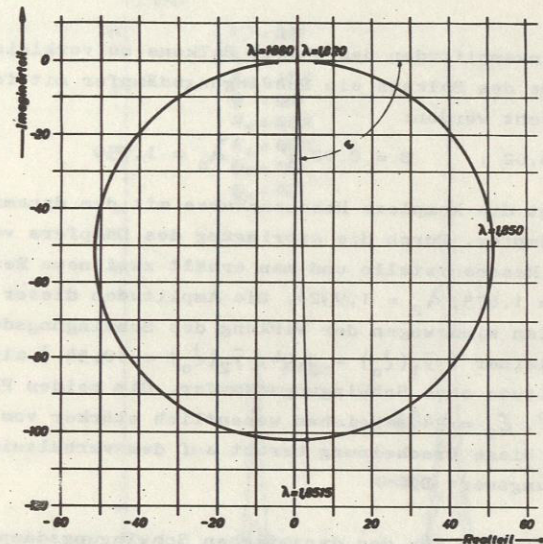


Bild 4.4: Komplexe Resonanzkurve für den Balken ohne Dämpfer

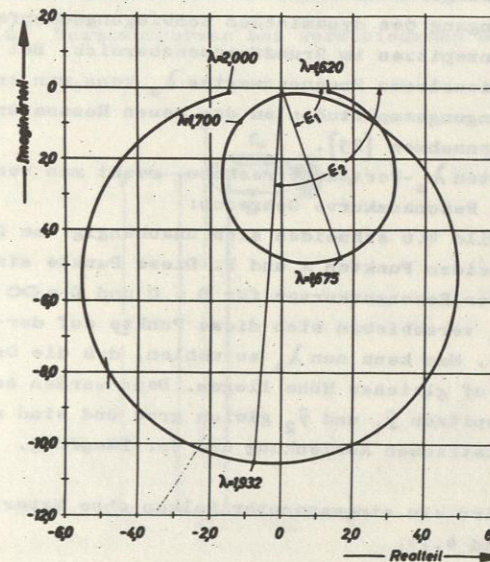


Bild 4.5: Komplexe Resonanzkurve für den Balken mit Dämpfer

Um die Resonanzamplituden des obigen Balkens zu verkleinern, soll am freien Ende des Balkens ein Schwingungsdämpfer mit folgenden Daten angebracht werden:

$$v_0 = 0,02 ; \quad D = 0,02 ; \quad \lambda_a = 1,750$$

Bild 4.5 zeigt die komplexe Resonanzkurve mit dem dynamischen Schwingungsdämpfer. Durch die Anbringung des Dämpfers verschwindet die alte Resonanzstelle und man erhält zwei neue Resonanzstellen ($\lambda_1 = 1,675, \lambda_2 = 1,932$). Die Amplituden dieser neuen Resonanzstellen sind wegen der Wirkung des Schwingungsdämpfers wesentlich kleiner ($\bar{y}_1(\lambda_0) = 5,04, \bar{y}_2(\lambda_0) = 10,54$) als die Resonanzamplitude ohne Schwingungsdämpfer. Die beiden Phasenwinkel ($\epsilon_1 = 71^\circ, \epsilon_2 = 94^\circ$) weichen wesentlich stärker vom ungedämpften Fall ab. Diese Erscheinung beruht auf dem verhältnismäßig großen Dämpfungswert D.

4.4. Die Abstimmung für den dynamischen Schwingungsdämpfer

Bild 4.6 zeigt die Schwingungsamplituden eines Balkens (Berechnungsbeispiel) in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz bei verschiedenen Dämpfungszahlen D des dynamischen Schwingungsdämpfers. Durch die Anbringung des dynamischen Schwingungsdämpfers erhält man zwei Resonanzspitzen im Grundfrequenzbereich. Bei richtiger Wahl des dimensionslosen Frequenzwertes λ_a kann man erreichen, daß beide Schwingungsamplituden an den neuen Resonanzstellen die gleichen Werte annehmen [25].

Um den günstigsten λ_a -Wert zu errechnen, macht man von folgender Eigenschaft der Resonanzkurve Gebrauch:

Die Kurven im Bild 4.6 schneiden sich unabhängig vom Dämpfungswert D in den beiden Punkten A und B. Diese Punkte sind die Schnittpunkte der Resonanzkurven für $D = 0$ und $D = \infty$. Durch Änderung von λ_a verschieben sich diese Punkte auf der Resonanzkurve für $D = 0$. Man kann nun λ_a so wählen, daß die Ordinaten dieser Punkte auf gleicher Höhe liegen. Dann werden auch die neuen Resonanzspitzen \bar{y}_1 und \bar{y}_2 gleich groß und sind nur eine Funktion der statischen Auslenkung und der Dämpfung.

Beispiel:

Als Beispiel wird ein eingespannter Balken ohne Materialdämpfung betrachtet (Bild 4.7).

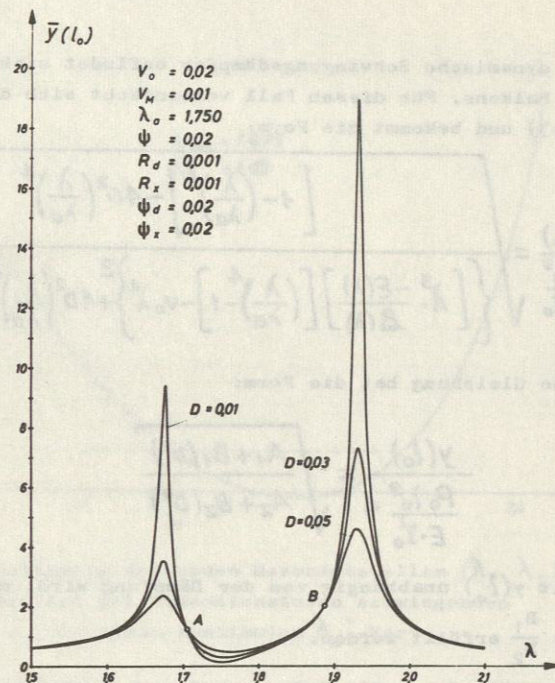


Bild 4.6: Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfungswerten

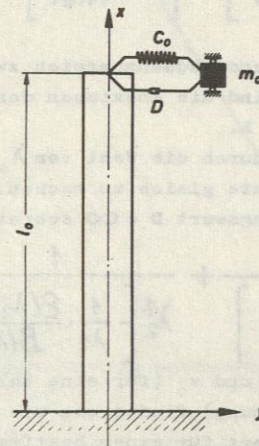


Bild 4.7: Eingespannter Balken mit Dämpfer

Der dynamische Schwingungsdämpfer befindet sich am freien Ende des Balkens. Für diesen Fall vereinfacht sich die Gleichung (4.43) und bekommt die Form:

$$\frac{y(l_0)}{\frac{\rho_0 l_0^3}{E \cdot I_0}} = \frac{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a}\right)^4\right] - 4D^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_a}\right)^4}}{\sqrt{\left\{\left[\lambda^3 \cdot \frac{-\varepsilon(\lambda)}{\beta(\lambda)}\right] \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_a}\right)^4 - 1\right] - v_0 \lambda^4\right\}^2 + 4D^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_a}\right)^4 \left[\lambda^3 \cdot \frac{-\varepsilon(\lambda)}{\beta(\lambda)} + v_0 \lambda^4\right]^2}} \quad (4.44)$$

Diese Gleichung hat die Form:

$$\frac{y(l_0)}{\frac{\rho_0 l_0^3}{E \cdot I_0}} = \sqrt{\frac{A_1 + B_1(D^2)}{A_2 + B_2(D^2)}}$$

Damit $y(l_0)$ unabhängig von der Dämpfung wird, muß die Bedingung

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ erfüllt werden.}$$

Man erhält durch die Umformung dieser Bedingung:

$$\left[\frac{2}{\lambda} \cdot \frac{-\varepsilon(\lambda)}{\beta(\lambda)}\right] \cdot \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a}\right)^4\right] + \left[2 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_a}\right)^4\right] \cdot v_0 = 0 \quad (4.45)$$

Diese Gleichung hat im Grundfrequenzbereich zwei Lösungen. Die Lösungswerte λ_1 und λ_2 sind die Abszissen der beiden dämpfungsunabhängigen Punkte A und B.

Der nächste Schritt ist, durch die Wahl von λ_a die Ordinaten der dämpfungsunabhängigen Punkte gleich zu machen. Wenn man die Gleichheit für den Dämpfungswert $D = \infty$ schreibt, erhält man

$$\frac{1}{\lambda_1^4 \left[-\frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\varepsilon(\lambda_1)}{\beta(\lambda_1)} + v_0\right]} + \frac{1}{\lambda_2^4 \left[-\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\varepsilon(\lambda_2)}{\beta(\lambda_2)} + v_0\right]} = 0 \quad (4.46)$$

Die Beziehung zwischen λ_a und v_0 (für eine bestimmte Dämpfermasse am besten passende Abstimmung) findet man wie folgt:

Die Gleichung (4.45) liefert für einen bestimmten λ_a^* -Wert zusammengehörende λ_1 , λ_2 und v_0 -Werte (Bild 4.8).

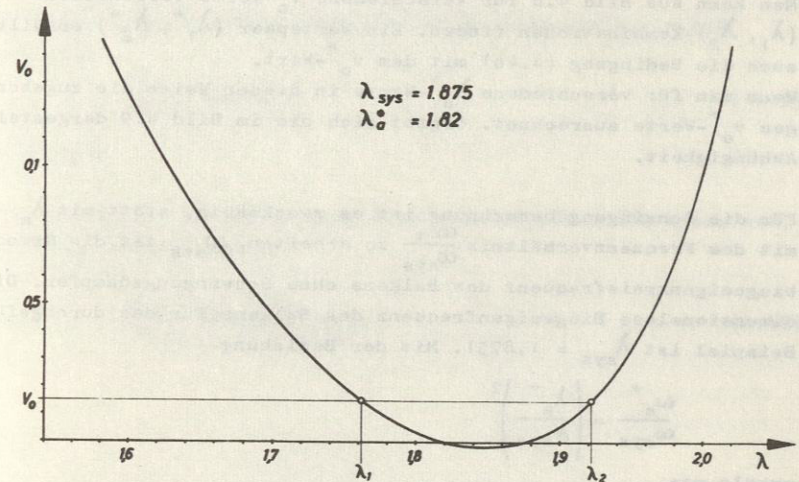


Bild 4.8: Zur Bestimmung der neuen Resonanzstellen (λ_1, λ_2) als Funktion der dimensionslosen schwingenden Masse v_0 für einen bestimmten λ_a^* -Wert

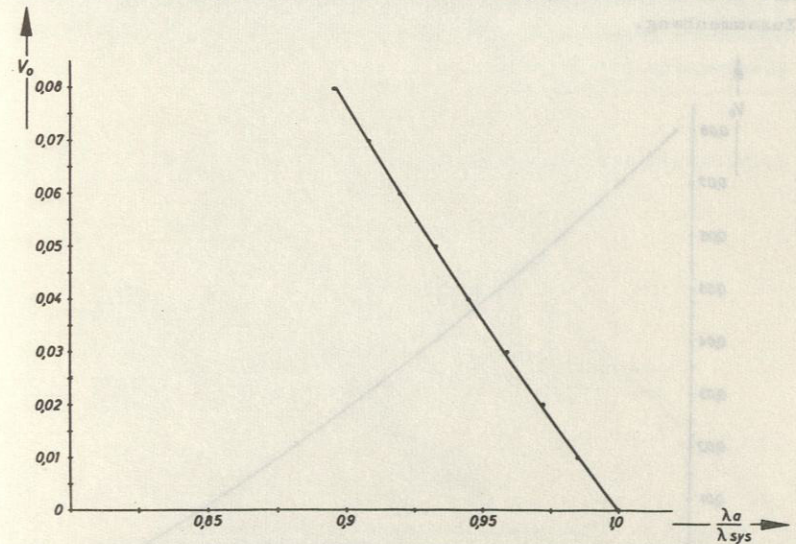


Bild 4.9: Günstiger dimensionsloser Frequenzwert λ_a^* für die dimensionslose schwingende Masse v_0

Man kann aus Bild 4.8 für verschiedene v_0 -Werte verschiedene (λ_1, λ_2) -Kombinationen finden. Ein Wertepaar $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ erfüllt auch die Bedingung (4.46) mit dem v_0^* -Wert. Wenn man für verschiedene λ_a^* -Werte in dieser Weise die zugehörigen v_0^* -Werte ausrechnet, ergibt sich die im Bild 4.9 dargestellte Abhängigkeit.

Für die Schwingungsberechnung ist es zweckmäßig, statt mit λ_a mit dem Frequenzverhältnis $\frac{\omega_a}{\omega_{sys}}$ zu arbeiten. ω_{sys} ist die Grundbiegeeigenkreisfrequenz des Balkens ohne Schwingungsdämpfer. Die dimensionslose Biegeeigenfrequenz des Balkens für das durchgeführte Beispiel ist $\lambda_{sys} = 1,8751$. Mit der Beziehung

$$\frac{\omega_a^*}{\omega_{sys}} = \left(\frac{\lambda_a^*}{\lambda_{sys}} \right)^2$$

erhält man

$$\frac{\omega_a^*}{\omega_{sys}} = 0,2844 \cdot \lambda_a^{*2}$$

Mit dieser Umformung erhält man den in Bild 4.10 dargestellten Zusammenhang.

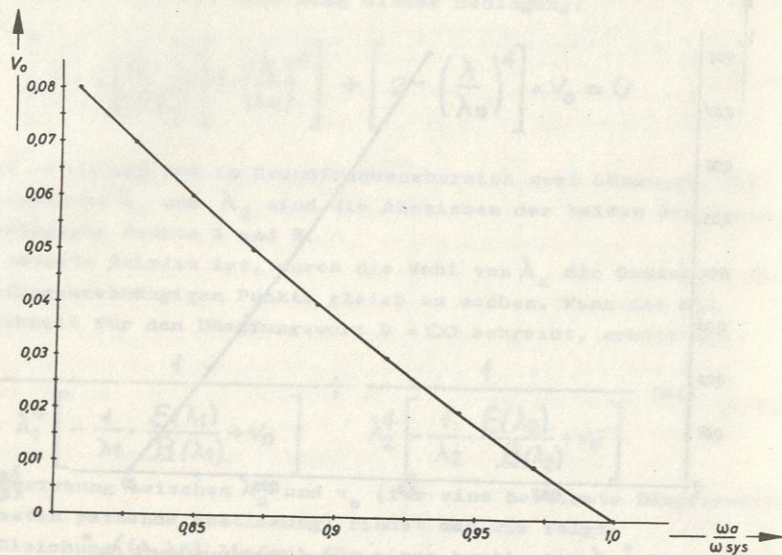


Bild 4.10: Das günstige Frequenzverhältnis $\frac{\omega_a^*}{\omega_{sys}}$ für die dimensionslose schwingende Masse v_0

Der Verlauf dieser Kurve läßt sich näherungsweise durch die Gleichung

$$\frac{\omega_a}{\omega_{sys}} \approx \frac{1}{1+3 \cdot v_0} \tag{4.47}$$

ausdrücken.

Wenn der Balken am freien Ende eine zusätzliche feste Masse hat, dann wird die Abstimmung

$$\frac{\omega_a}{\omega_{sys}} \approx \frac{1+3v_M}{1+3(v_M+v_0)} \tag{4.48}$$

5. EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN

5.1. Allgemeines

Um die theoretischen Ergebnisse des dynamischen Schwingungsdämpfers für den Balken mit der Wirklichkeit zu vergleichen, wurden mit verschiedenen Modellen Versuche durchgeführt.

Als Modelle wurden Biegebalken aus Flachstahl verwendet, wobei an den freien Enden der Balken ein entsprechender Flüssigkeitsbehälter angebracht wurde.

Die Verbindung des Balkens mit dem Fundament wurde in zwei Ausführungsformen durchgeführt

- 1) feste Einspannung
- 2) elastische Einspannung

Bild 5.1 zeigt die elastische Einspannung des Balkens (a) mit Hilfe von zwei Drehstabfedern (c). Durch Verschieben der Klemmverbindungen (b) kann man die Längen der Drehstabfedern beliebig ändern. Diese beiden Drehstabfedern dienen gleichzeitig als Biegefedern. Durch die Längenänderung der Drehstäbe erzielt man verschiedene Dreh- und Quersfedersteifigkeiten für die elastische Einspannung des Balkens.

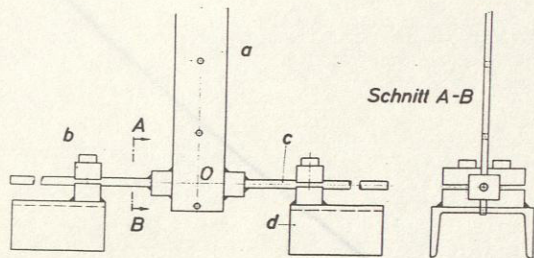


Bild 5.1: Elastische Einspannung des Balkens

Die Dreh- und Quersfedersteifigkeiten der Einspannung können durch die Geometrie und Materialeigenschaften der Federn errechnet werden. Um verschiedene Nebeneinflüsse zu berücksichtigen, wurden diese Steifigkeiten durch Messungen ermittelt und dabei Abweichungen von den rechnerisch ermittelten Federsteifigkeiten festgestellt.

Für die Quersfedersteifigkeitsbestimmung wurde die Einspannung an der Stelle 0 (Bild 5.2) quer zur Drehstabachse mit verschiedenen Kräften (G) belastet und die dadurch entstandenen Deformationen mit einem Weggeber gemessen.

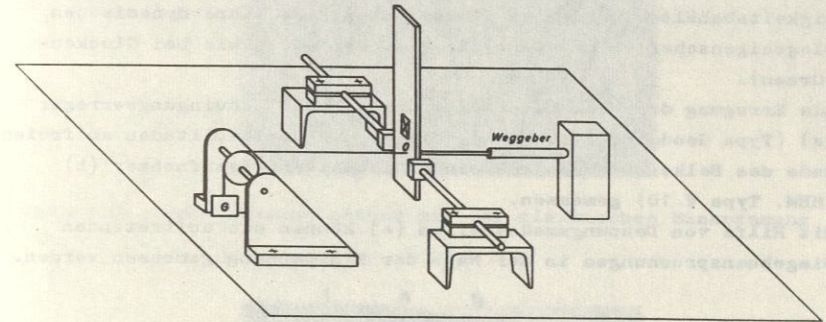


Bild 5.2: Ermittlung der Quersfedersteifigkeit der Einspannung

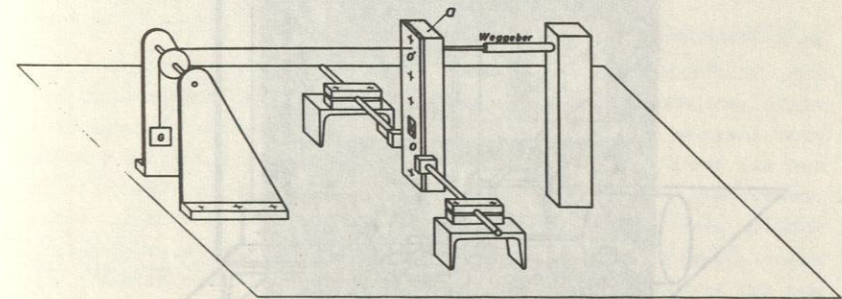


Bild 5.3: Ermittlung der Drehfedersteifigkeit der Einspannung

Für die Messung der Drehfedersteifigkeit (Bild 5.3) wurde der Balken zuerst in der Einspannfläche durch Anbringung eines anderen Stabteiles (a) biegesteif gemacht. Der Balken wurde an der Stelle O' (Abstand $OO' = r$) quer zur Balkenachse belastet und die Verdrehung des Balkenteiles mit einem Weggeber ermittelt. Bei der Ermittlung der Drehfedersteifigkeit wurde die schon bekannte Querdeformation abgezogen.

5.2. Versuchsaufbau

Die Bilder 5.4 und 5.5 zeigen den Aufbau der Versuchseinrichtung mit der elastischen Einspannung (Die Versuchsbalken mit dem Flüssigkeitsbehälter wurden so dimensioniert, daß ihre dynamischen Biegeeigenschaften ungefähr die gleichen waren wie bei Glockentürmen).

Die Erregung des Balkens erfolgt durch einen Schwingungserreger (a) (Type Goodmans V 50 MK 1), die Schwingungsamplituden am freien Ende des Balkens werden mit einem induktiven Wegaufnehmer (h) (HBM, Type W 10) gemessen.

Mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen (e) können die auftretenden Biegebeanspruchungen in der Nähe der Einspannung gemessen werden.

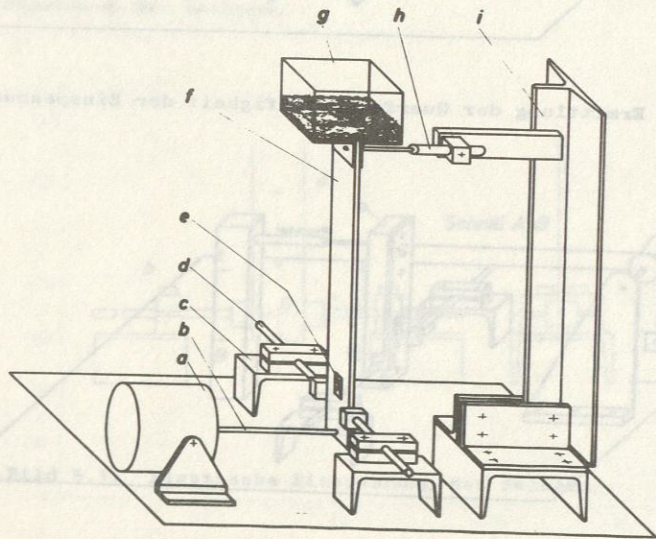


Bild 5.4: Versuchseinrichtung mit der elastischen Einspannung

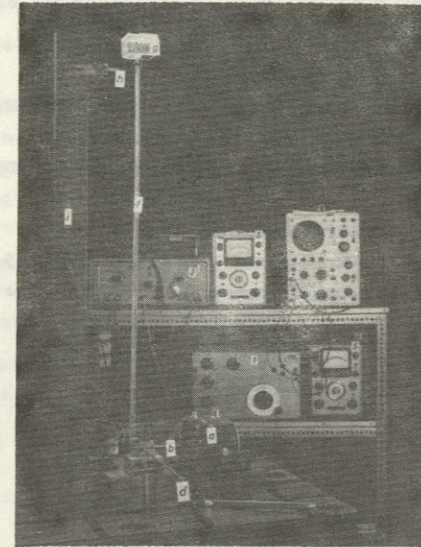


Bild 5.5: Versuchseinrichtung mit der elastischen Einspannung

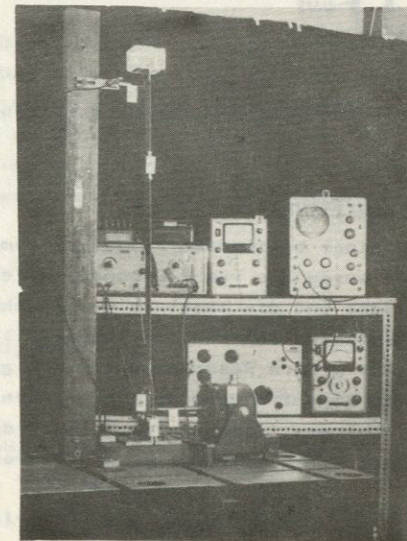


Bild 5.6: Versuchseinrichtung mit der festen Einspannung

Der elektrische Teil der Versuchseinrichtung besteht aus folgenden Geräten (Bild 5.5 und 5.7).

- 1) R-C-Generator PEEKEL Type 015 A
- 2) Leistungsverstärker FEY Type LV 412 oder BUCHER Type VTL 300 B
- 3) Elektrodynamischer Schwingungserreger GOODMANS Type V 50 MK 1
- 4) Induktiver Wegaufnehmer HBM Type W 10
- 5) Trägerfrequenz-Meßbrücke HBM Type KWS/II-5
- 6) Kathodenstrahl-Oscillograph TEKTRONIX Type 502

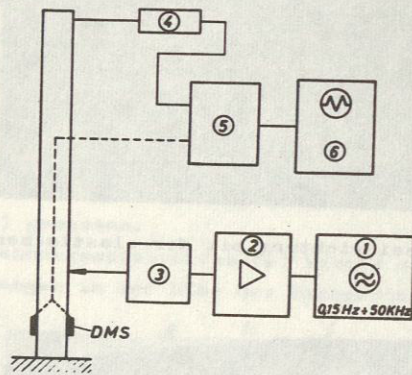


Bild 5.7: Elektrischer Teil der Versuchseinrichtung

5.3. Versuchsdurchführung

Nach Einfüllung einer bestimmten Flüssigkeitsmenge in den Flüssigkeitsbehälter wurde die vom R-C-Generator erzeugte Frequenz sehr langsam erhöht und die Anzeigen des induktiven Weggebers und der Dehnungsmeßstreifen für die eingestellte Frequenz wurden beobachtet. Um die beiden Resonanzamplituden genau ermitteln zu können, wurde die Eigenfrequenz in der Resonanznähe noch langsamer geändert. Bei den Messungen wurde auch darauf geachtet, daß die Amplituden der Oberflächenwellen begrenzt blieben.

Versuchsreihe I

Balken mit konstantem, rechteckigem Querschnitt aus Stahl.
Balken:

- Länge des Balkens: $l_0 = 108 \text{ cm}$
- Querschnittsfläche des Balkens: $b \cdot h = 5 \text{ cm} \times 0,4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$
- Äquatoriales Trägheitsmoment des Querschnittes um die Biegeachse: $I_0 = 26,667 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^4$
- Einspannung:

 - feste Einspannung $R_d = R_x = 0$

- Behälter:

 - Rechteckiger Behälter mit den Abmessungen
 - $a_{\text{Behälter}} = b_{\text{Behälter}} = 9,1 \text{ cm}$
 - Gewicht des Behälters: $G_{\text{Behälter}} = 0,218 \text{ kp}$

Versuchsreihe II

Balken mit konstantem, rechteckigem Querschnitt aus Stahl.
Balken:

- Länge des Balkens: $l_0 = 120,5 \text{ cm}$
- Querschnittsfläche des Balkens: $b \cdot h = 5 \text{ cm} \times 0,5 \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}^2$
- Äquatoriales Trägheitsmoment des Querschnittes um die Biegeachse: $I_0 = 52,083 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^4$
- Einspannung:

 - Durchmesser der Drehstabfeder: $d_{\text{Feder}} = 0,8 \text{ cm}$
 - Gesamtlänge der Drehstabfeder: $l_{\text{Feder}} = 12,4 \text{ cm}$
 - Gemessene Federsteifigkeiten der Einspannung:
 - $\chi = 9090 \text{ kpcm/rad}$
 - $d = 1562 \text{ kp/cm}$

- Dimensionslose Federsteifigkeiten der Einspannung:

$$R_x = \frac{EI_0}{l_0 \chi} = 0,099854$$

$$R_d = \frac{EI_0}{d \cdot l_0^3} = 0,000040019$$

Behälter:
Rechteckiger Behälter mit den Abmessungen:

- $a_{\text{Behälter}} = b_{\text{Behälter}} = 9,35 \text{ cm}$
- Gewicht des Behälters: $G_{\text{Behälter}} = 0,217 \text{ kp}$

Die Daten für die Berechnungen:

Dynamischer Schwingungsdämpfer:

Flüssigkeitsvolumen im Behälter: $100 \text{ cm}^3 < V_F < 140 \text{ cm}^3$

Flüssigkeitsmasse im Behälter: $M_F = \rho_F \cdot V_F$

$$\text{Höhenverhältnis: } \frac{h}{a} = \frac{V_F}{a^2 \cdot b}$$

$$\text{Grundkreisfrequenz der Flüssigkeit: } \omega_o = \sqrt{\frac{g \cdot \pi \cdot \text{Tanh}\left(\pi \frac{h}{a}\right)}{l_o}}$$

$$\text{Frequenzkennwert für den Dämpfer: } \lambda_o = l_o \cdot 4 \sqrt{\frac{l_o \cdot \omega_o^2}{E \cdot I_o}}$$

$$\text{Grundschwingmasse: } m_o = M_F \cdot \frac{8 \text{Tanh}\left(\pi \frac{h}{a}\right)}{\pi^3 \cdot \frac{h}{a}}$$

$$\text{Feste Masse: } M = M_F \cdot \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \text{Tanh}\left[\left(2n+1\right) \cdot \pi \cdot \frac{h}{a}\right]}{\pi^3 \cdot \left(2n+1\right)^3 \cdot \frac{h}{a}} \right]$$

$$\text{Verhältniswert } v_o : v_o = \frac{m_o \cdot g}{G_{\text{Balken}}}$$

$$\text{Verhältniswert } v_M : v_M = \frac{M \cdot g + G_{\text{Behälter}}}{G_{\text{Balken}}}$$

Dämpfungswerte D für die verschiedenen Einfüllmengen der Flüssigkeit können aus Tabelle 2.1 (Kapitel 2) durch lineare Interpolation ermittelt werden.

Balken:

Die Abmessungen und Werkstoffeigenschaften des Balkens sind bekannt. Werkstoffdämpfungswerte ψ des Balkens können durch Ausschwingversuche ermittelt werden.

Die Umformung der jeweiligen Frequenz f (abgelesen vom Frequenzgenerator in Hertz) zu dem dimensionslosen Frequenzwert erfolgt mit:

$$\lambda = l_o \cdot 4 \sqrt{\frac{l_o \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2}{E \cdot I_o}}$$

Die zur Erregung des Balkens benötigte Kraft war sehr klein. Durch das Strom-Kraft-Diagramm des Erregers konnte man die Kraft in dem hier vorliegenden Fall eines sehr schmalen und tief liegenden Frequenzbereiches nur mit recht geringer Genauigkeit ermitteln. Auch mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen konnte die Kraft im Erregerstift nicht mit ausreichender Genauigkeit gemessen werden, da die maximal zu erwartende Dehnung bei dem gewählten Stiftdurchmesser etwa in der Größenordnung von 0,1 - 0,2 μ D lag.

Die Amplitude der Kraft ist aber durch die Stromkonstanthaltung der Erregerinrichtung konstant geblieben.

Das Eliminieren der konstanten Erregerkraft bei der Berechnung von dimensionslosen Schwingungsamplituden \bar{y} (l_o) für die Versuche erfolgte mit Hilfe eines Normierungsfaktors zwischen den Versuchs- und Rechenergebnissen.

Der Normierungsfaktor ist das Verhältnis der rechnerisch ermittelten Resonanzamplitude (dimensionslos) zu der gemessenen Resonanzamplitude (Dehnung oder Weg) für den Balken ohne Schwingungsdämpfer. Für jede Versuchsreihe gibt es einen Normierungsfaktor. Die dimensionslosen Resonanzkurven für die Versuche werden durch die Multiplikation der Versuchsamplituden mit dem Normierungsfaktor ermittelt.

5.4. Versuchsergebnisse

Die Diagramme 1 bis 6 (Anhang) zeigen die berechneten und gemessenen Resonanzkurven für die Versuchsreihe I und die Diagramme 7 bis 13 die der Versuchsreihe II.

Die ersten Diagramme der jeweiligen Versuchsreihen (Diagramm 1 und 7) stellen einen Vergleich zwischen dem Fall des Balkens ohne Flüssigkeitsfüllung im Behälter und dem Fall einer günstigen Flüssigkeitsfüllung dar.

In Diagramm 5 sind die beiden Resonanzamplituden der Versuchseresonanzkurve gleich. Es liegt also der Fall einer günstigen Abstimmung für den eingespannten Balken vor. Wenn man die Daten dieses Versuches $v_o = 0,0572$ und $v_M = 0,1480$ in die Gleichung (4.48) einsetzt, erhält man für den günstigen Frequenzkennwert der Flüssigkeit

$$\lambda_a^* = \lambda_{\text{sys}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 3 \cdot 0,1480}{1 + 3(0,1480 + 0,0572)}} = 0,9441 \cdot \lambda_{\text{sys}}$$

Mit $\lambda_{\text{sys}} = 1,688$ (rechnerisch ermittelte Resonanzstelle ohne Flüssigkeit) wird $\lambda_a^* = 0,9441 \cdot 1,688 = 1,593$. Dieser Frequenzkennwert unterscheidet sich kaum von dem theoretischen Frequenzkennwert der Flüssigkeitsmenge des obengenannten Versuches ($\lambda_a = 1,597$). Die Unterschiede zwischen den Meß- und Rechenergebnissen können in zwei Gruppen zusammengefaßt werden:

- 1) Unterschiede der Resonanzfrequenzen
- 2) Unterschiede der Resonanzamplituden.

In den Tabellen 5.1 und 5.2 werden die gemessenen und gerechneten Resonanzstellen für die beiden Versuchsreihen angegeben. Die letzten zwei Spalten der Tabellen zeigen die Unterschiede der Rechnung gegenüber der Messung.

Tabelle 5.1: Gemessene und gerechnete Resonanzstellen des Balkens (Versuchsreihe I)

Versuch	$\lambda_{1 \text{ gem.}}$	$\lambda_{1 \text{ ger.}}$	$\lambda_{2 \text{ gem.}}$	$\lambda_{2 \text{ ger.}}$	$\frac{f_{1 \text{ ger.}} [\text{Hz}]}{f_{1 \text{ gem.}} [\text{Hz}]}$	$\frac{f_{2 \text{ ger.}} [\text{Hz}]}{f_{2 \text{ gem.}} [\text{Hz}]}$
I-1	1,666	1,688	-	-	1,027	-
I-2	1,447	1,447	1,742	1,743	1,000	1,001
I-3	1,460	1,464	1,756	1,758	1,005	1,002
I-4	1,464	1,477	1,781	1,775	1,018	0,993
I-5	1,468	1,486	1,798	1,791	1,025	0,992
I-6	1,472	1,492	1,819	1,810	1,027	0,990

Die Unterschiede für die dämpferlosen Fälle (Versuche I-1 und II-1) lassen sich durch die Einspannverhältnisse erklären. Bild 5.6 zeigt den Balken mit der festen Einspannung. Auch mit Hilfe der Klemmverbindung (c) kann man keine theoretisch feste Einspannung erzielen. Die Berechnung berücksichtigt keine zusätzliche Federung der Einspannung und deshalb liegt die rechnerische Resonanzstelle höher als die gemessene. Der Fehler ist

jedoch gering (2,7 %) und könnte z.B. durch die Einführung einer Drehfedersteifigkeit an der Einspannstelle beseitigt werden. Der Fehler für den elastisch eingespannten Balken ist noch geringer (2,2 %).

Tabelle 5.2: Gemessene und gerechnete Resonanzstellen des Balkens (Versuchsreihe II)

Versuch	$\lambda_{1 \text{ gem.}}$	$\lambda_{1 \text{ ger.}}$	$\lambda_{2 \text{ gem.}}$	$\lambda_{2 \text{ ger.}}$	$\frac{f_{1 \text{ ger.}} [\text{Hz}]}{f_{2 \text{ gem.}} [\text{Hz}]}$	$\frac{f_{2 \text{ ger.}} [\text{Hz}]}{f_{2 \text{ gem.}} [\text{Hz}]}$
II-1	1,583	1,600	-	-	1,022	-
II-2	1,440	1,423	1,692	1,661	0,977	0,964
II-3	1,438	1,438	1,706	1,678	1,000	0,967
II-4	1,438	1,445	1,713	1,688	1,010	0,971
II-5	1,448	1,449	1,717	1,698	1,001	0,978
II-6	1,448	1,456	1,739	1,716	1,011	0,974
II-7	1,448	1,460	1,756	1,737	1,017	0,978

Die Fehler bei den Resonanzstellen sind ziemlich klein (Größtwert 3,6 % beim Versuch II-2).

Neben den verschiedenen Fehlerquellen der Versuche (z.B. Ablesegenauigkeit der Instrumente, Meßgerätefehler, nichtsinusförmiger Kraftverlauf des Verstärkers, Einfluß der den Versuchsbalken umgebenden Luft) gibt es zwei wichtige, die Berechnung stark beeinflussende Faktoren.

Man kann aus Tabelle 2.1 (Kapitel 2) sehen, daß die rechnerischen und experimentell ermittelten Eigenfrequenzen der Flüssigkeit verschieden sind. Dieser Unterschied ist ziemlich klein, macht sich aber bei der Auswertung der Gleichung (4.43) bemerkbar. Bei der Gleichung (4.43) treten die Glieder λ_a^4 auf ($\lambda_a^4 \hat{=} \omega_a^2$). Die fehlerhafte Ermittlung von λ_a^4 verursacht unterschiedliche Resonanzfrequenzen.

Tabelle 5.3: Gemessene und gerechnete Resonanzamplituden des Balkens (Versuchsreihe I)

Versuch	$\bar{y}_1(\lambda_0)$ gem.	$\bar{y}_1(\lambda_0)$ ger.	$\bar{y}_2(\lambda_0)$ gem.	$\bar{y}_2(\lambda_0)$ ger.	$\frac{\bar{y}_{1ger.}}{\bar{y}_{1gem.}}$	$\frac{\bar{y}_{2ger.}}{\bar{y}_{2gem.}}$
I-1	82,73	82,73	-	-	1,000	-
I-2	3,47	2,98	9,93	10,74	0,859	1,082
I-3	4,30	4,09	8,27	8,63	0,951	1,044
I-4	5,38	5,51	7,28	7,07	1,024	0,971
I-5	6,29	7,11	6,29	6,00	1,130	0,954
I-6	8,27	9,01	5,62	5,16	1,089	0,918

In den Tabellen 5.3 und 5.4 werden die gemessenen und gerechneten Resonanzamplituden der beiden Versuchsreihen angegeben. Die Fehler bei den Resonanzamplituden sind größer als bei den Resonanzstellen (Größtwert 16,8 % beim Versuch II-7).

Die Unterschiede der Resonanzamplituden und die unterschiedliche Kurvenform an den Resonanzstellen können neben dem Einfluß der abweichenden Flüssigkeitseigenfrequenzen auch durch die nicht ausreichende Kenntnis der Flüssigkeitsdämpfung erklärt werden. Die versuchsmäßig gewonnenen Dämpfungswerte sind nicht genau genug. Die von diesen Werten direkt abhängige Amplituden der Resonanzstellen werden dadurch unterschiedlich sein.

Tabelle 5.4: Gemessene und gerechnete Resonanzamplituden des Balkens (Versuchsreihe II)

Versuch	$\bar{y}_1(\lambda_0)$ gem.	$\bar{y}_1(\lambda_0)$ ger.	$\bar{y}_2(\lambda_0)$ gem.	$\bar{y}_2(\lambda_0)$ ger.	$\frac{\bar{y}_{1ger.}}{\bar{y}_{1gem.}}$	$\frac{\bar{y}_{2ger.}}{\bar{y}_{2gem.}}$
II-1	126,53	126,53	-	-	1,000	-
II-2	5,69	5,16	12,02	11,63	0,907	0,968
II-3	7,91	7,36	10,12	8,96	0,930	0,885
II-4	8,86	8,72	8,86	7,89	0,984	0,891
II-5	9,49	10,16	8,22	7,10	1,071	0,864
II-6	12,33	13,31	6,96	5,89	1,079	0,846
II-7	15,81	16,92	6,01	5,00	1,070	0,832

Die anderen Fehlerquellen der Versuche haben keine große Bedeutung. Die Dämpfungskräfte der den Balken umgebenden Luft sind wesentlich kleiner als die Werkstoffdämpfungskräfte. Bei den niedrigeren Versuchsfrequenzen haben die Dämpfungskräfte der Luft praktisch keine Bedeutung. Die Erregung des Balkens durch den nichtsinusförmigen Kraftverlauf ist nicht als Fehlerquelle anzusehen, da die resultierenden erzwungenen Bewegungen des Balkens wegen der kleinen Werkstoffdämpfung des Systems in jedem Fall sinusförmig waren.

6. DISKUSSION DER ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN EINES FLÜSSIGKEITS-BEHÄLTERS ALS SCHWINGUNGSTILGER FÜR EINEN GLOCKENTURM

In den vorherigen Kapiteln wurde eine in einem Behälter befindliche Flüssigkeitsmasse als Mittel gegen gefährliche Glockenturmschwingungen vorgeschlagen. Dabei wurde der Turm als ein Balken mit konstantem Querschnitt angenommen und der Flüssigkeitsbehälter durch ein mechanisches Ersatzsystem (Feder-Masse-Dämpfer-System) ersetzt.

Die durch diese Vereinfachungen gewonnenen theoretischen Erkenntnisse des dynamischen Schwingungsdämpfers können auch für Glockentürme gut verwendet werden.

Zur Erörterung der Frage, ob und wie man einen Flüssigkeitsbehälter bei einem Glockenturm als Abhilfemaßnahme gegen Schwingungen verwenden kann, müssen folgende Gesichtspunkte besprochen und diskutiert werden:

1. Die äußere Form und die Abmessungen des Turmes müssen so sein, daß man die notwendigen Flüssigkeitsbehälter an der geeigneten Stelle des Turmes unterbringen kann. Die in Mitteleuropa übliche Bauform (rechteckförmige, große Grundfläche, geschlossene Bauform) ermöglicht es, die Flüssigkeitsbehälter in der Nähe des Glockenstuhls anzubringen.
2. Durch das Gewicht der Flüssigkeit und durch das zusätzliche Behältergewicht darf die statische Sicherheit des Turmes nicht gefährdet werden. Die Gewichte der Flüssigkeit und des Behälters werden als zusätzliche statische Lasten zusätzliche Druckspannungen verursachen. Diese Druckspannungen werden jedoch sehr gering sein. Eine Zusatzlast von $2 \div 3$ % des Turmgesamtgewichtes kann ohne Gefährdung des Bauwerkes aufgenommen werden. Bei der Dimensionierung der Glockentürme ist der wichtigste Gesichtspunkt die durch die Horizontalkraft der Glocke auftretende größte Biegespannung.

3. Die Wellenamplitude der Flüssigkeit muß unter der Wirkung der Horizontalkraft der Glocke unterhalb einer bestimmten Grenze bleiben. Bei günstiger Wahl der Flüssigkeitsmenge und Flüssigkeitseigenfrequenz wird die alte Resonanzstelle des Turmes verschwinden. In diesem Fall schwingt der Turm unter der Wirkung der Glockenkraft mit sehr kleiner Amplitude bzw. bleibt beinahe in Ruhe. Während der Turm beinahe in Ruhe bleibt, bewegt sich die Flüssigkeit so, daß die durch ihre Federwirkung erzeugte Federkraft entgegengesetzt gleich der Glockenkraft ist. Man kann aus der Gleichung (2.55) die Federsteifigkeit der Flüssigkeit ermitteln und den Schwingweg der Flüssigkeitsmasse im Behälter unter der Wirkung der Glockenkraft errechnen. Die Wellenamplituden der Flüssigkeit dürfen nicht zu groß sein (Schwappen), da sonst die rechnerisch ermittelten Schwingungsgrößen der Flüssigkeit nicht mehr anwendbar sind. Die Wellenamplituden dürfen jedoch 35 - 50 % der Flüssigkeitshöhe im Behälter betragen, ohne daß zwischen Versuch und Theorie merkliche Unterschiede festgestellt werden [11].

4. Zur Dimensionierung der Behälter und der Flüssigkeitshöhe: Nach Bestimmung des Turmgewichtes ist man in der Lage, die Flüssigkeitsmenge zu wählen. Diese Flüssigkeitsmenge wird wahrscheinlich in mehreren Behältern untergebracht werden müssen. Die Behälterabmessungen werden von der Biegeeigenfrequenz des Turmes abhängen. Die Biegeeigenfrequenz des Turmes ist bekannt, womit man die Eigenfrequenz der Flüssigkeit und die Behälterabmessungen wählen kann. Als Behälterabmessung kommt nur die Breite des Behälters in Schwingungsrichtung in Frage. Die Länge des Behälters kann beliebig gewählt werden. Die Höhe der Flüssigkeit darf jedoch nicht beliebig groß gewählt werden, da sonst die nicht schwingende Masse im Vergleich zur Gesamtmasse zu groß wird. Ist nur eine Glocke vorhanden, so kann die Flüssigkeitseigenfrequenz ohne große Mühe gewählt werden. Die Hinweise für eine günstige Abstimmung können aus Gleichung (4.47) entnommen werden. Hat der Turm mehrere Glocken, dann ist es zweckmäßig, zuerst die Frequenzen und die Harmonischen der einzelnen Glocken festzustellen. Die durch die Flüssigkeit neu aufgebauten Resonanzstellen dürfen auf keinen Fall mit den Harmonischen der einzelnen Glocken übereinstimmen.

Anwendungsbeispiel:

Um eine Vorstellung von den Behälterabmessungen, Flüssigkeitsmengen und Behälteranordnungen bei den tatsächlichen Glockentürmen zu bekommen, sei ein Beispiel durchgerechnet.

Der durch die Glockenschwingung gefährdete Turm soll die folgenden Daten haben

Gewicht des Turmes	$G_{\text{Turm}} \approx 400 \text{ to.}$
Grundfläche	$4,50 \text{ m} \times 4,50 \text{ m}$
Grundbiegeeigenfrequenz	$f_{eT} = 1,00 \text{ Hz}$
Werkstoffdämpfungswert	$\psi = 0,10$

Der Turm soll eine Glocke mit folgenden Daten haben:

Gewicht der Glocke	$G_{G1} = 2000 \text{ kp}$
Frequenz der Glocke	$f_{G1} = 0,333 \text{ Hz}$
Beiwert \bar{k} zur Bestimmung der Horizontalkraftkomponente	

$$\bar{k} = \frac{r_s^2}{r_i^2} = 0,6$$

Der Turm wird durch die 3. Harmonische der Glockenkraft ($3 \cdot f_{G1} = 1,000 \text{ Hz}$) zur Resonanz angeregt. Durch einen Flüssigkeitsdämpfer sollen die angeregten kräftigen Schwingungen des Turmes beseitigt werden.

Die Bilder 6.1 und 6.2 zeigen zwei verschiedene Behälteranordnungen (Anordnung 1 und 2). Die Flüssigkeitsmenge ist in beiden Fällen etwa gleich.

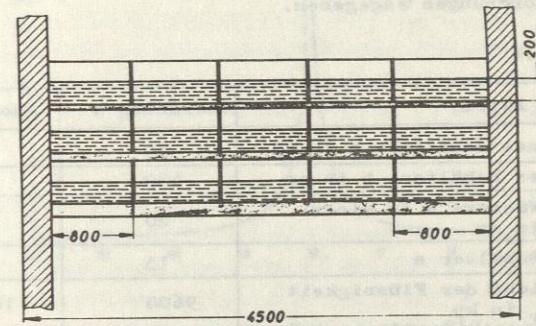


Bild 6.1: Behälteranordnung 1

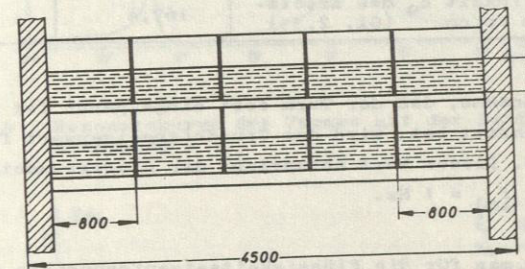


Bild 6.2: Behälteranordnung 2

In Tabelle 6.1 sind die Daten und Schwingungsgrößen für die beiden Anordnungen angegeben.

Tabelle 6.1

Daten	Anordnung 1	Anordnung 2
Breite eines Behälters a in cm	80	80
Länge eines Behälters b in cm	400	400
Höhe des Wassers h in einem Behälter in cm	20	32
Zahl der Behälter n	15	10
Gesamtgewicht der Flüssigkeit G_F in kp	9600	10240
Eigenfrequenz f_a der Flüssigkeit in Hz (Gleichung 2.58)	0,800	0,911
Das schwingende Gewicht der Flüssigkeit G_o in kp (Gleichung 2.53)	6497	5614
Das stillstehende Gewicht der Flüssigkeit G_M in kp (Gleichung 2.54)	3103	4624
Verhältniswert v_o (Gl. 4.17)	0,01624	0,01404
Verhältniswert v_M (Gl. 4.18)	0,00776	0,01156
Federsteifigkeit c_o des Ersatzsystems in kp/cm (Gl. 2.55)	167,4	187,4

Mit der Annahme, daß der Turm fest eingespannt ist und konstanten Querschnitt hat, wird der Grundbiegeeigenwert für den Turm $\lambda_e = 1,875$. Dieser Wert entspricht der Biegegrundeigenfrequenz des Turmes $f_{eT} = 1$ Hz.

Damit kann man für die Flüssigkeitseigenfrequenzen der beiden Behälteranordnungen die dimensionslosen Frequenzkennwerte ermitteln

$$\lambda_{a_1} = 1,677, \quad \lambda_{a_2} = 1,790.$$

Das Bild 6.3 zeigt die Resonanzkurve für den Turm ohne Flüssigkeit. Die dimensionslose Schwingungsamplitude ist $\bar{y}(\zeta_0) = 20,33$.

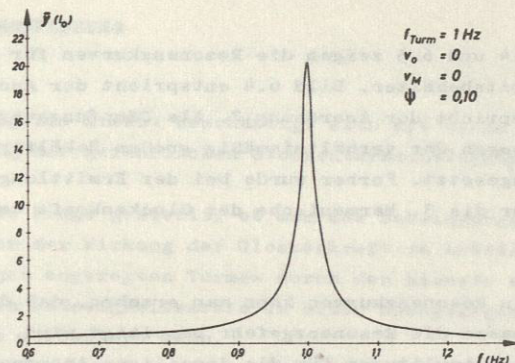


Bild 6.3: Resonanzkurve des Turmes ohne Flüssigkeitsbehälter

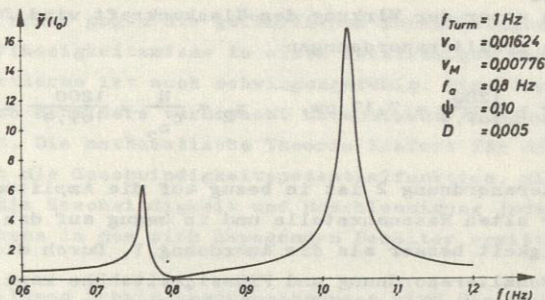


Bild 6.4: Resonanzkurve des Turmes mit der Behälteranordnung 1

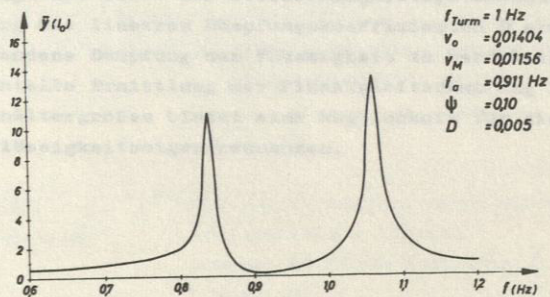


Bild 6.5: Resonanzkurve des Turmes mit der Behälteranordnung 2

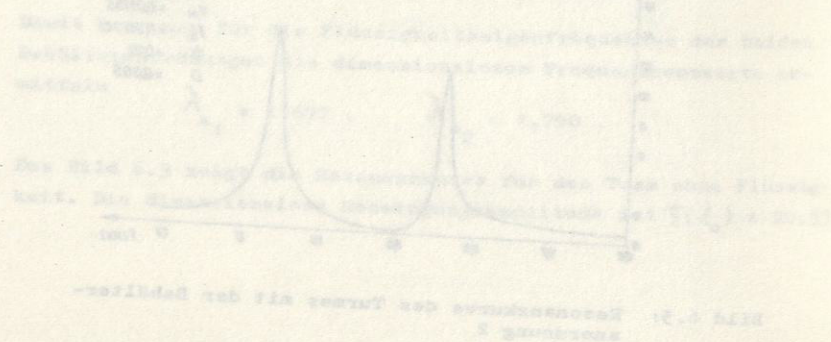
Die Bilder 6.4 und 6.5 zeigen die Resonanzkurven für den Turm mit Flüssigkeitsbehälter. Bild 6.4 entspricht der Anordnung 1, Bild 6.5 entspricht der Anordnung 2. Als Dämpfungswert für das Wasser wird wegen der verhältnismäßig großen Behälterabmessungen $D = 0,005$ eingesetzt. Ferner wurde bei der Ermittlung der Resonanzkurven nur die 3. Harmonische der Glockenkraft berücksichtigt.

Aus den beiden Resonanzkurven kann man ersehen, daß durch die Flüssigkeitsmasse die Resonanzgefahr beseitigt wird. Die neuen dimensionslosen Amplituden für die jeweiligen Anordnungen werden bei 1 Hz $\bar{y}_1(\lambda_0) = 3,73$ und $\bar{y}_2(\lambda_0) = 1,40$.

Die Amplitude der horizontalen Kraftkomponente der Glocke ist $|H| = \bar{k} \cdot G_{G1} = 0,6 \cdot 2000 = 1200$ kp. Der Schwingweg der Flüssigkeitsmasse unter der Wirkung der Glockenkraft wird für die jeweiligen Behälteranordnungen

$$x_1 = \frac{H}{c_{o1}} = \frac{1200}{167,4} = 7,17 \text{ cm}, \quad x_2 = \frac{H}{c_{o2}} = \frac{1200}{187,4} = 6,40 \text{ cm}.$$

Die Behälteranordnung 2 ist in bezug auf die Amplitude des Turmes an der alten Resonanzstelle und in bezug auf den Schwingweg der Flüssigkeit besser als die Anordnung 1. Durch die richtige Wahl der Behälteranordnung und Flüssigkeitshöhe kann man das Schwingungsverhalten eines gefährdeten Glockenturmes erheblich verbessern.



7. ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem Verfahren zur Beseitigung der gefährlichen Glockenturmschwingungen.

Es wird die Frage gestellt, ob man das Schwingungsverhalten eines unter der Wirkung der Glockenkraft zu kräftigen Biegeschwingungen angeregten Turmes durch den Einsatz einer entsprechenden Flüssigkeitsmasse an einer hochgelegenen Stelle des Turmes verbessern kann.

Der Schwingungserreger eines Glockenturmes ist die Glocke mit ihrem periodischen Kraftverlauf beim Läuten. Durch die Übereinstimmung der Grundbiegeeigenfrequenz des Turmes mit der Frequenz einer Harmonischen der Glockenkraft macht der Turm an seiner Spitze große Schwingungsamplituden.

Die als Maßnahme gegen die gefährlichen Turmschwingungen vorgeschlagene Flüssigkeitsmasse in einem rechteckigen Behälter mit freier Oberfläche ist auch schwingungsfähig. Eine harmonische Bewegung des Behälters verursacht harmonische Bewegungen der Flüssigkeit. Die mathematische Theorie liefert für die ideelle Flüssigkeit die Geschwindigkeitspotentialfunktion, mit deren Hilfe man die Geschwindigkeit und Beschleunigung jedes Flüssigkeitsteilchens in dem sich bewegenden Behälter ermitteln kann.

Für die weiteren Schwingungsberechnungen wird die Flüssigkeit in dem rechteckigen Behälter durch ein mechanisches Modell ersetzt. Das mechanische Modell besteht aus mehreren Feder-Masse-Paarungen. Die Bestimmung der Schwingungsgrößen des mechanischen Modells erfolgt mit Hilfe der Geschwindigkeitspotentialfunktion. Die Einführung des linearen Dämpfungskoeffizienten D ermöglicht es, die vorhandene Dämpfung der Flüssigkeit zu berücksichtigen. Die experimentelle Ermittlung der Flüssigkeitsdämpfung für verschiedene Behältergrößen bietet eine Möglichkeit für die Kontrolle der Flüssigkeitseigenfrequenzen.

Zur Bestimmung des Schwingungsverhaltens des Glockenturmes mit der Flüssigkeitsmasse wird der Turm als Balken mit konstantem Querschnitt und mit konstanter Werkstoffdämpfung aufgefaßt. Die elastischen Einspannverhältnisse der Glockentürme werden durch Quer- und Drehfedern an der Einspannstelle des Balkens berücksichtigt.

Durch die Annahme der konstanten verhältnismäßigen Elementdämpfung ist es möglich, einen komplexen Elastizitätsmodul für den Balken zu definieren und die gedämpften Balkenschwingungen wie die ungedämpften zu behandeln. Für die Flüssigkeit wird ein vereinfachtes mechanisches Modell verwendet. Dabei wird die Flüssigkeit durch zwei Massen (feste und schwingende Massen), eine Feder und ein Dämpfungsglied ersetzt.

Bei der Ermittlung der Schwingungsamplitude am freien Ende des Balkens bei verschiedenen Erregerfrequenzen, werden nur dimensionslose Kenngrößen benutzt. Berechnungsbeispiele erläutern die Ermittlung der Resonanzkurve für den Grundfrequenzbereich. Die Möglichkeit für eine günstige Abstimmung des Ersatzsystems wird diskutiert und eine Näherungsformel an einem Beispiel erläutert.

Experimentelle Untersuchungen ermöglichen es, die theoretischen Ergebnisse mit den Messungen zu vergleichen. Die Vergleiche zwischen den Rechen- und Meßergebnissen zeigen sowohl für die Resonanzfrequenzen als auch für die Resonanzamplituden eine zufriedenstellende Übereinstimmung.

Schließlich wird die Einbaumöglichkeit und die Wirkung eines Flüssigkeitsdämpfers bei einem Glockenturm diskutiert. Ein Berechnungsbeispiel mit praktischen Turm Daten zeigt, daß man mit Hilfe des Dämpfers das Schwingungsverhalten eines gefährdeten Turmes erheblich verbessern kann.

8. LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Lürenbaum, K. Schwingungen von Glockentürmen
VDI-Bericht Nr. 48 (1961) 95
- 2 Lürenbaum, K. Über die Schwingungserregung von
Glockentürmen
VDI-Bericht Nr. 88 (1965) 89
- 3 Geiger, J. Die Krafteinwirkung des Glocken-
läutens auf den Glockenturm
VDI 104 (1962) 15
- 4 Geiger, J. Zur Vermeidung und Beseitigung von
Turmschwingungen
VDI 108 (1966) 673
- 5 Rausch, E. Maschinenfundamente
Düsseldorf 1959 (VDI-Verlag)
- 6 Jahnke, E.,
F. Emde Funktionstabellen mit Formeln und Kurven
Leipzig 1938
- 7 Lamb, H. Hydrodynamics
Cambridge 1957
- 8 Wehausen, J.V.,
Edmund v. Laitone Surface Waves; Encyclopedia of Physics,
volume IX, Berlin 1960
- 9 Graham, E.W.,
A.M. Rodriguez The Characteristics of Fuel Motion
Which Affect Airplane dynamics;
Journal of Applied Mechanics 19
(1952) 381
- 10 Case, D.M.,
W.C. Parkinson Damping of surface waves in an
incompressible liquid;
Journal of Fluid Mechanics 2
(1957) 172

- 11 Keulegan, G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins; Journal of Fluid Mechanics 6 (1961) 33
- 12 Bauer, H.F. Treibstoffschwingungen in Raketenbehältern und ihr Einfluß auf die Gesamtstabilität Zeitschrift für Flugwissenschaften 12 (1964) 85
- 13 Hübner, E. Technische Schwingungslehre Berlin 1957
- 14 Young, D. Continuous Systems, Handbook of Engineering Mechanics, Chapter 61 New York 1962
- 15 Zurmühl, R. Numerische Behandlung von Schwingungsaufgaben mittels Übertragungsmatrizen VDI-Bericht Nr. 35 (1959) 7
- 16 Zurmühl, R. Matrizen, 4. Auflage, Berlin 1964
- 17 Pestel, E., Schumpich G. und S. Spierig Katalog von Übertragungsmatrizen zur Berechnung technischer Schwingungsprobleme VDI-Bericht Nr. 35 (1959) 11
- 18 Sorokin, E.S. Die Methode der Berechnung des unelastischen Materialwiderstandes bei der Berechnung der Schwingungen von Konstruktionen Kapitel in Dynamik von Baukonstruktionen Herseg. von B.G. Korenew, Verlag Technik 1953

- 19 Pinnekamp, W. Ein Beitrag zur Berechnung von Amplituden und dynamischen Beanspruchungen bei transversalen Resonanzschwingungen werkstoffgedämpfter, elastisch gelagerter Balken Dissertation, TH Aachen, 1960
- 20 Lazan, B.J., L.E. Goodmann Material and Interface Damping Shock and Vibration Handbook, Volume II, 36, New York 1961
- 21 Thomson, W.T. Systems of one degree of freedom Handbook of Engineering Mechanics, Chapter 56, New York 1962
- 22 Lohse, G. Das dynamische Verhalten von elastisch eingespannten Bauwerken VDI-Bericht Nr. 4 (1955) 57
- 23 Collatz, L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen Leipzig 1949
- 24 Chippewa Operating System FORTRAN Reference Manual Palo Alto 1966
- 25 Den Hartog, J.P. Mechanische Schwingungen Berlin 1952

A N H A N G

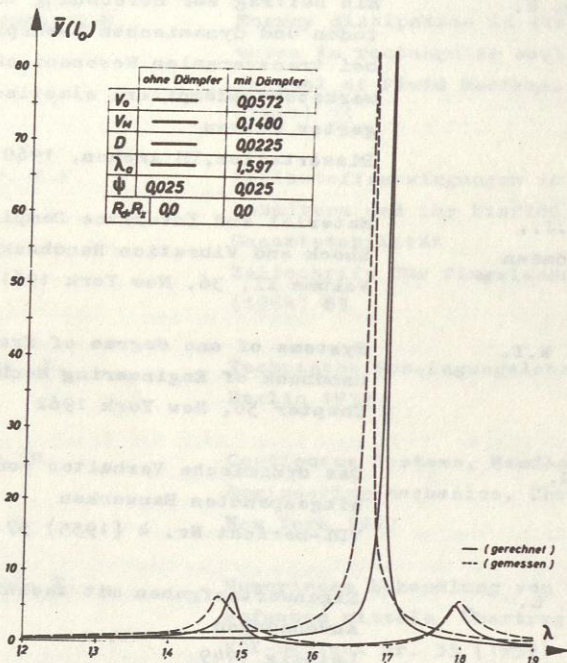


Diagramm 1 - Versuch I-1 Fest eingespannter Balken

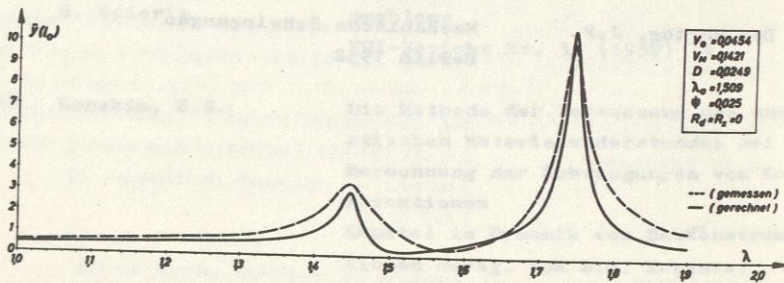


Diagramm 2 - Versuch I-2 Fest eingespannter Balken

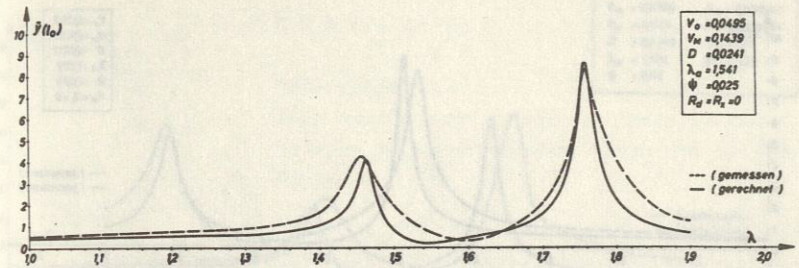


Diagramm 3 - Versuch I-3 Fest eingespannter Balken

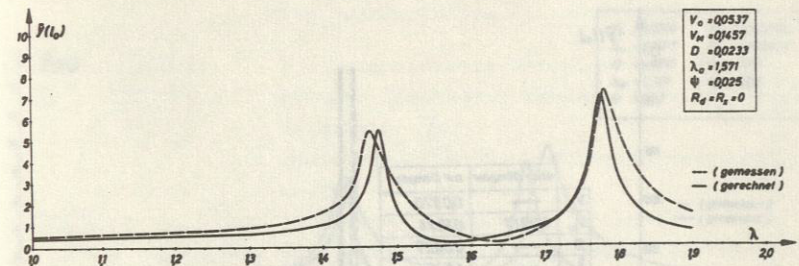


Diagramm 4 - Versuch I-4 Fest eingespannter Balken

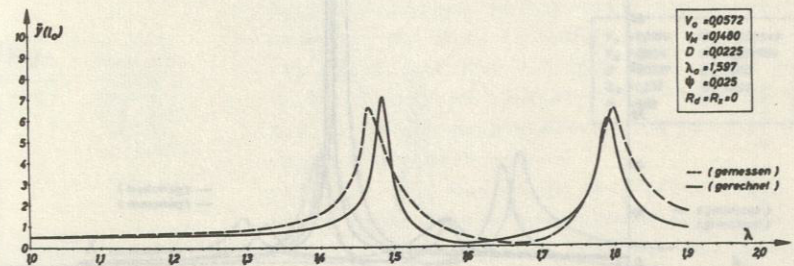


Diagramm 5 - Versuch I-5 Fest eingespannter Balken

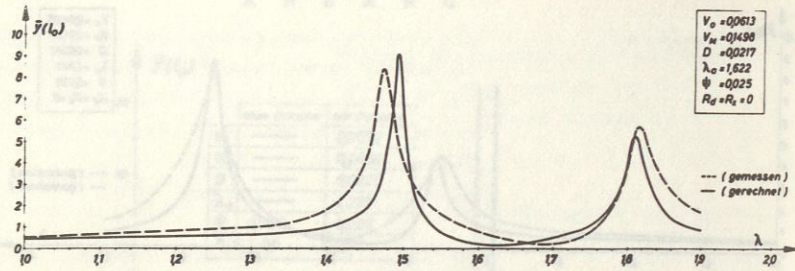


Diagramm 6 - Versuch I-6 Fest eingespannter Balken

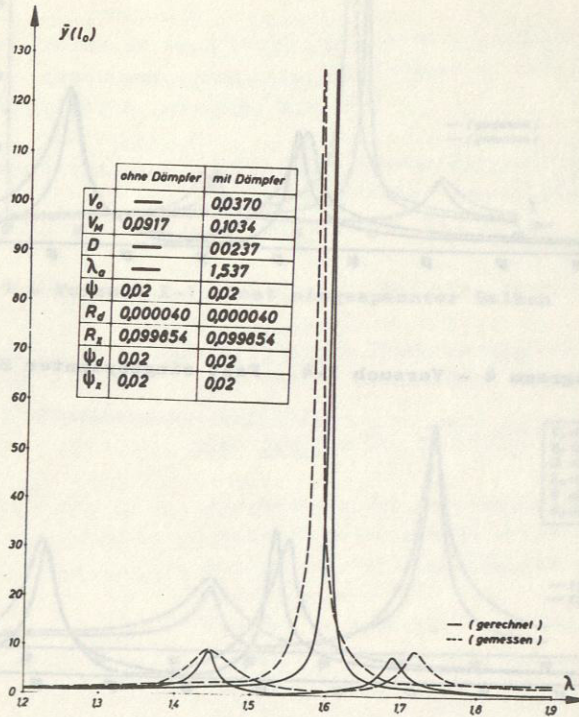


Diagramm 7 - Versuch II-1 Elastisch eingespannter Balken

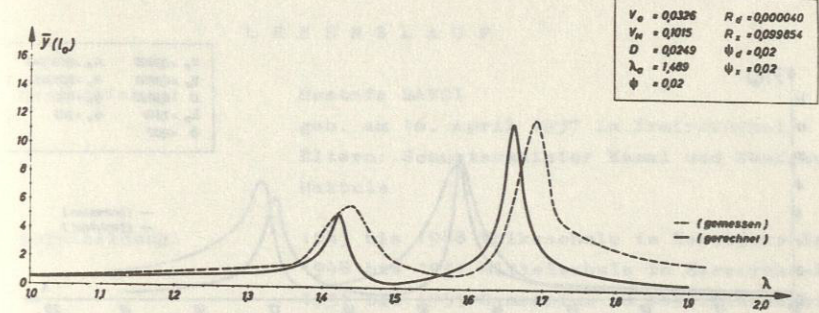


Diagramm 8 - Versuch II-2 Elastisch eingespannter Balken

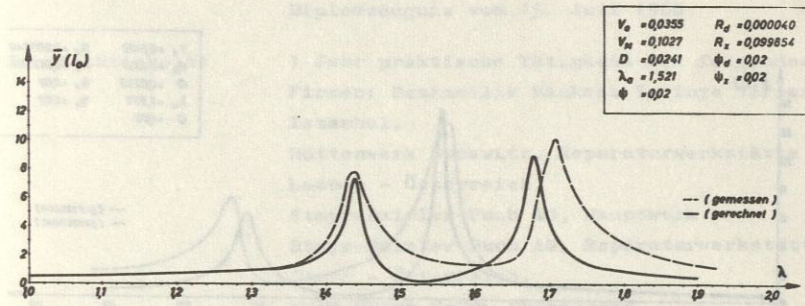


Diagramm 9 - Versuch II-3 Elastisch eingespannter Balken

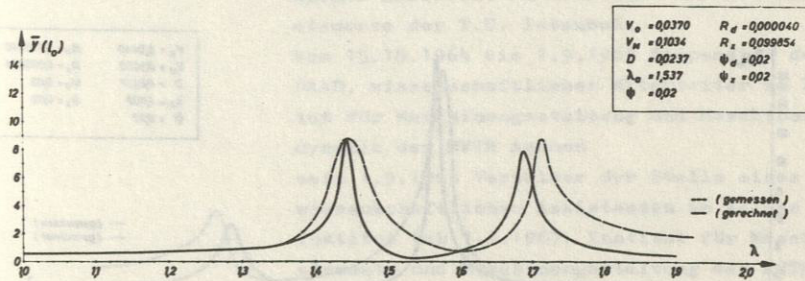


Diagramm 10 - Versuch II-4 Elastisch eingespannter Balken

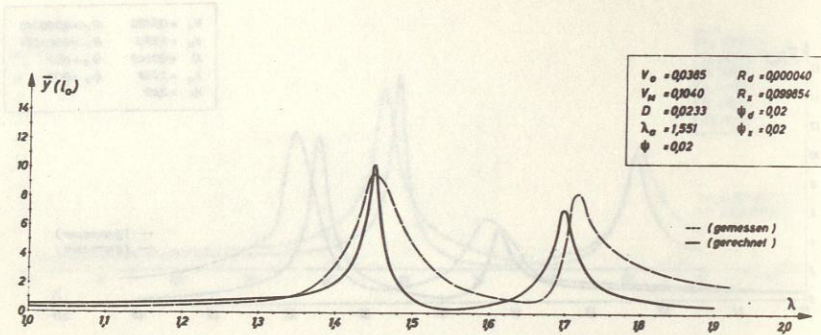


Diagramm 11 - Versuch II-5 Elastisch eingespannter Balken

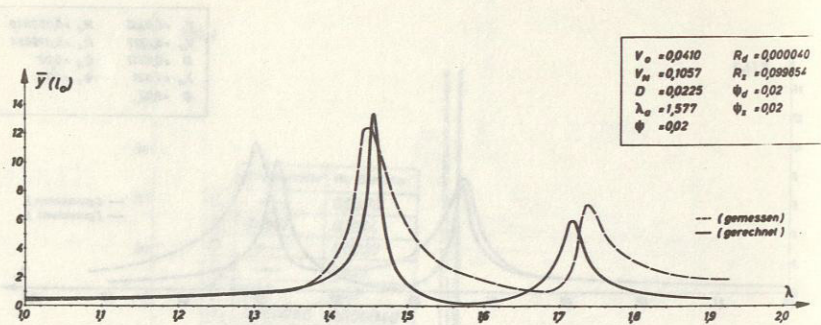


Diagramm 12 - Versuch II-6 Elastisch eingespannter Balken

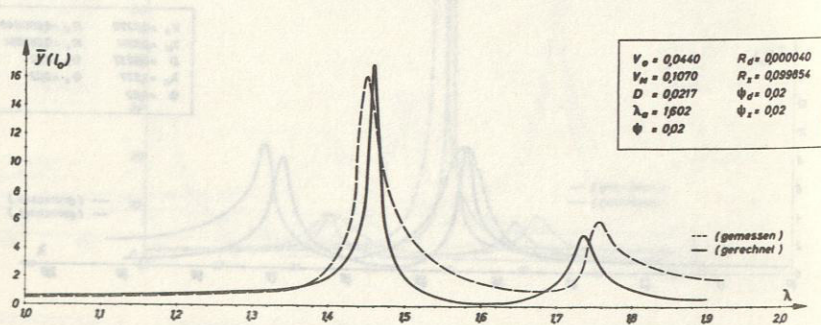


Diagramm 13 - Versuch II-7 Elastisch eingespannter Balken

L E B E N S L A U F

Persönliches:

Mustafa SAVCI
geb. am 16. April 1937 in Izmir/Türkei
Eltern: Schustermeister Kemal und Ehefrau
Makbule

Schulbildung:

1943 bis 1948 Volksschule in Karşıyaka-Izmir
1948 bis 1951 Mittelschule in Karşıyaka-Izmir
1951 bis 1955 Gymnasium in Karşıyaka-Izmir
Reifezeugnis vom Juni 1955

Studium:

1955 bis 1960 Maschinenbau, Fachrichtung
Kraftmaschinen, an der Technischen Universität
Istanbul
Diplomzeugnis vom 15. Juli 1960

Berufstätigkeit:

1 Jahr praktische Tätigkeit bei folgenden
Firmen: Denizcilik Bankası Istinye Tersanesi
Istanbul,
Hüttenwerk Donawitz, Reparaturwerkstätte
Leoben - Österreich,
Steyr-Daimler-Puch AG, Hauptwerk
Steyr-Daimler-Puch AG, Reparaturwerkstätte
Steyr - Österreich,
Auto-Union GmbH, Düsseldorf.
Vom 15.1.1961 bis 15.1.1963 Militärdienstzeit
als Leutnant der Türkischen Armee.
Von Februar 1963 bis Oktober 1964 wissenschaft-
licher Assistent am Lehrstuhl für Maschinen-
elemente der T.U. Istanbul.
Vom 15.10.1964 bis 1.9.1965 Stipendiat des
DAAD, wissenschaftlicher Mitarbeiter im Insti-
tut für Maschinengestaltung und Maschinen-
dynamik der RWTH Aachen
seit 1.9.1965 Verwalter der Stelle eines
wissenschaftlichen Assistenten im selben
Institut (ab 1.1.1967: Institut für Maschinen-
elemente und Maschinengestaltung der RWTH
Aachen)